

Lesson 1. Topological Phase 拓扑

Berry Phase. 定义在绝热近似上. (Adiabatic Approximation)
即系统尺寸, 环境... 缓慢变化, 这样 Hamiltonian $H(t)$ 可以微扰展开, 由缓慢变化的 V 组成. $H(t) = H_0 + \hat{V}[\lambda(t)]$

写出 Schrodinger Equation: $i\hbar \frac{\partial (\hat{U}(t) \psi(0))}{\partial t} = \hat{H}(t) \hat{U}(t) \psi(0)$
么正变换 $\hat{U}(t)$

写出时间演化算符: $\hat{U}(t) = \sum_n |\psi_n(0)\rangle \langle \psi_n(0)|$

代入. 化简. 定义 t 时刻本征能量: $H(t) \psi_n(t) = E_n(t) \psi_n(t)$

定义: $D_m(t) = \langle \psi_m(0) | \psi(t) \rangle$. 有:

$$i\hbar \frac{dD_m}{dt} = E_m(t) D_m - i\hbar \sum_n \langle \psi_m(t) | \frac{d\psi_n(t)}{dt} \rangle D_n$$

差分方程关于 D_m 可设一阶线性齐次通解 $y = Ce^{-\int p(x) dx}$, ie:

$$D_n(t) = C_n e^{i\theta_n(t)}; \quad \theta_n(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n(t') dt'$$

回代原方程, 关于 C_n 方程, 绝热近似 $\frac{d\psi_n(t)}{dt}$ 小, 忽略此振荡项, 得:

$$\dot{C}_m = -C_m \langle \psi_m(t) | \frac{d\psi_m(t)}{dt} \rangle$$

分离变量求解得:

$$C_m(t) = C_m(0) e^{i\gamma_m(t)} \quad \gamma_m(t) = i \int_0^t \langle \psi_m(t') | \frac{d\psi_m(t')}{dt'} \rangle dt'$$

最终, 如果 0 时刻, 系统处于 m 本征态上, $|\psi(0)\rangle$ 即 $|\psi_m(0)\rangle$

$$|\psi(0)\rangle = U(0) \psi(0)$$

$$= \sum_n |\psi_n(0)\rangle \langle \psi_n(0) | \psi(0) \rangle$$

而: $D_m(t) = \langle \psi_m(t) | \psi(t) \rangle$ 已解出为: $C_m(0) e^{i\gamma_m(t)} e^{i\theta_n(t)}$, 代入.

$$|\psi(0)\rangle = \sum_n |\psi_n(0)\rangle C_n(0) e^{i\gamma_m(0)} e^{i\theta_n(0)}$$

即本征态 $|\psi_m(0)\rangle = \sum_n [C_n(0)] |\psi_n(0)\rangle$, i.e.

$$C_n(0) = \delta_{mn}.$$

那么, 在 t 时刻:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n |\psi_n(t)\rangle \langle \psi_n(0) | \psi(0) \rangle$$

$$= \sum_n \delta_{mn} |\psi_n(t)\rangle e^{i\gamma_m(t)} e^{i\theta_n(t)}.$$

即 $|\psi(t)\rangle = \psi_m(t) e^{i\gamma_m(t)} e^{i\theta_n(t)}.$

t 时刻系统也会处于 m 本征态上 (t 时刻的) 只不过差一相位.

$$\theta_n(t) = -\frac{1}{\hbar} \int_0^t E_n(t') dt' \quad \text{动力学相位.}$$

$$\gamma_m(t) = i \int_0^t \langle \psi_m(t') | \frac{d\psi_m(t')}{dt'} \rangle dt' \quad \text{几何相位.}$$

Actually, $H(t)$ 不直接依赖于 t , 而依赖于外场, etc. of.

依赖磁场 $B[B(t)]$. ψ_m 亦为 $\psi_m[B(t)]$ or 参数 R $\psi_m[R(t)]$

几何相位因此有: $\gamma_m[R(t)] = i \int_0^t \langle \psi_m[R(t')] | \frac{d\psi_m[R(t')]}{dt'} \rangle dt'$

可做 $\gamma_m(t) = i \int_{R_{begin}}^{R_{end}} \langle \psi_m(\vec{R}) | d \nabla_R \psi_m(\vec{R}) \rangle d\vec{R}$

我们定义参数空间中运动一周 $R_{begin} = R_{end}$. eg. 磁场变化一个

周期, eg. A-B effect 绕磁场源转一周为 Berry Phase. i.e.:

$$\gamma_n = i \oint \langle \psi_n(\vec{R}) | \nabla_R \psi_n(\vec{R}) \rangle d\vec{R}$$

Berry Connection: γ_n 又可以写作:

$$\gamma_n = \oint_S \nabla_{\vec{R}} \times \underbrace{\langle \psi_n(\vec{R}) | i \nabla_{\vec{R}} \psi_n(\vec{R}) \rangle}_{\text{Berry Connection. } \vec{A}} d\vec{S}$$

$$\Rightarrow \gamma_n = \oint_S \underbrace{(\nabla_{\vec{R}} \times \vec{A})}_{\text{Berry 曲率, } \Omega_n = \nabla_{\vec{R}} \times A_n(\vec{R})} \cdot d\vec{S} \quad \text{Berry curvature}$$

晶格体系中 $\vec{R}$ 即是动量 $\vec{k}$ $\psi_{n,k}(\vec{r}) = e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} u_{n,k}(\vec{r})$. Bloch 波

$$\Omega_n(\vec{k}) = \nabla_{\vec{k}} \times \langle u_n(\vec{k}) | \nabla_{\vec{k}} u_n(\vec{k}) \rangle$$

$$\gamma_n = \int_{\text{BZ}} \Omega_n(\vec{k}) d\vec{k}$$

例子: Quantum Hall Effect; Chern number.

[Topological Insulators; Shun-Qing Shen] Chapter. 4.3.

Hall 电导: $\sigma_{xy} = n \frac{e^2}{h} = \frac{e^2}{h} \int_{\text{BZ}} \frac{\Omega_{xy} d\vec{k}}{(2\pi)^2}$ 呈现平台特征.

假定: $[E, \phi(\text{势}), A]$ 电磁场参量, 回忆电磁场 Hamiltonian 及其带来的一系列对易关系, 我们仍然利用绝热近似波函数

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n e^{i\gamma_n(t)} e^{i\theta_n(t)} C_n(t) |\psi_n(t)\rangle$$

$C_n(t)$ 难解, 但可微扰展开, 回代 Schrodinger Equation 求解

0 阶项为 $\delta_{m,n}$; 1 阶项为 (微扰展开 $|\psi_n(t)\rangle$)

$|\psi_n(t)\rangle$ (由 $C_n^0(t) = \delta_{mn} \Rightarrow e^{i\gamma_n(t)} e^{i\theta_n(t)} \delta_{mn} |\psi_n(t)\rangle = \psi_n(t)$,
与 $C_n^1(t)$ 部分组成)

$$|\psi_n(t)\rangle = \underbrace{|\psi_n(t)\rangle}_{\text{zero-order}} - i\hbar \sum_{m \neq n} \frac{\langle \psi_m(t) | \partial_t \psi_n(t) \rangle}{E_n - E_m} \underbrace{|\psi_m(t)\rangle}_{\text{first-order}}$$

速度算符: $v = -i\hbar [H, r] \xrightarrow{\text{Fourier}} v(q) = \frac{i}{\hbar} \nabla_q [H(q, t)]$

求 $V_n(q) = \langle \psi_n | \frac{i}{\hbar} \nabla_q H(q, t) | \psi_n \rangle$

$$= \frac{i}{\hbar} \nabla_q E_n(q) - i \sum_{m \neq n} \frac{1}{E_n - E_m} \left(\langle \psi_n(q, t) | \nabla_q H | \psi_m(q, t) \rangle \langle \psi_m(q, t) | \partial_t \psi_n(q, t) \rangle + \text{h.c.} \right)$$

利用: $\langle \psi_n(q, t) | \nabla_q H | \psi_m(q, t) \rangle = (E_n - E_m) \langle \nabla_q \psi_n(q, t) | \psi_m(q, t) \rangle$
 $(\nabla_q \psi_n(q, t)) = (\nabla_q \psi) \psi + (\nabla_q \psi) \psi$

得到 $V_n(q) = \frac{i}{\hbar} \nabla_q E_n(q) - \Omega_{q,t}^n$

其中: $\Omega_{q,t}^n = i \left(\langle \nabla_q \psi_n | \partial_t \psi_n \rangle - \langle \partial_t \psi_n | \nabla_q \psi_n \rangle \right)$

电子在电场中加速 $\partial_t \psi = \frac{\partial \psi}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial t}$ 而正因 $\vec{E}$ 场在 t 下产生动量 q . $\frac{dq}{dt} = -\frac{e}{\hbar} \vec{E}$ $\therefore \partial_t = (-\frac{e}{\hbar}) \vec{E} \cdot \nabla_k$ 化简上式:

$$V_n(q) = \frac{i}{\hbar} \nabla_q E_n(q) - \frac{e}{\hbar} \vec{E} \times \Omega_{q,t}^n$$

$$\Omega_{q,t}^n = e \nabla_q \times \langle \psi_n(q) | i \nabla_q \psi_n(q) \rangle$$

← Berry 曲率

电流定义为 v_q 集体效应:

$$j = -e \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} v_n(k) f(k) \rightarrow \text{Fermi-Dirac Distribution}$$

代入 $V_n(q)$ 第一项: $-e \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \cdot \frac{i}{\hbar} f(k)$ 奇 Function. 假设费米面上全填满. 0 阶电子不动. $j^0 = 0$.

$$j^1 \cdot \text{给出 Hall 电导 } j = \sigma_H \varepsilon_{\alpha\beta} E_\beta$$

注意 $V_n(q)$ $\vec{E} \times \Omega^n$ 纵向电场产生横向电流

代入 Hall Conductance

$$\sigma_H = \frac{e^2}{\hbar 2\pi} \int_{BZ} d\vec{q} \cdot \Omega_{k_x k_y}^n$$

现在计算这个积分: $\int_{BZ} \frac{\partial_{k_x} \epsilon_{k_y}}{(2\pi)^2} dk$

计算 δ_{xy} . 利用 Stokes 定理:

$$\nabla_k \times A = \nabla_{k_x} A_y - \nabla_{k_y} A_x$$

$$\Rightarrow dk_x dk_y \nabla_k \times A(k_x, k_y) = dk_y [A_y(2\pi, k_y) - A_y(0, k_y)] \\ + dk_x [A_x(2\pi, k_x) - A_x(0, k_x)]$$

而: $A_x(k_x, 2\pi) = \langle u(k_x, 2\pi) | v \partial_{k_x} | u(k_x, 2\pi) \rangle$ 代入:

$$= -\partial_{k_x} \theta_x(k_x) + A_x(k_x, 0)$$

Therefore: 原式 = $\int_0^{2\pi} dk_y [-\partial_{k_y} (\theta_{k_y})] + (\text{x方向}) \dots = 2\pi$

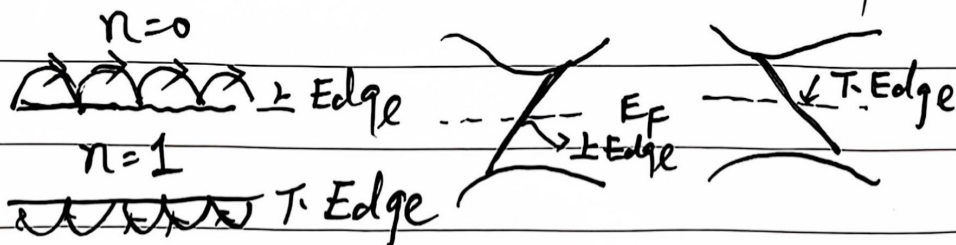
Therefore: Hall Conductance. 称 ν 为 **第一类陈数**

$$\delta_{xy} = \nu \frac{e^2}{h}$$

[Topological Insulator]

例子: Quantum Spin Hall Effect; $\mathbb{Z}_2$ invariant

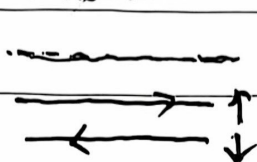
Quantum Hall 电流处于边界态, 由外场控制定向流动,
Quantum Spin Hall 无电流, 自旋定向移动上 $\odot$; 下 $\otimes$; 不必
依赖外场, 而内生一拓扑序, QHE 能带:



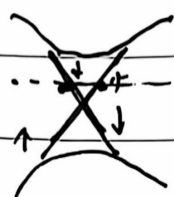
上、下 Edge 各有一条拓扑边缘态, 从拓扑不变量的角度, 外界 $n=0$
内部 $n=1$ 为绝缘态. $\int_{\text{内部}} \psi d\Omega = 1$ 而从外部到内部无法连续过渡. $\int_{\text{Bond}} \psi dS$ 既非零亦非一, 而是任意; 就如同

K 有缺陷, 不能全空间和分而言. 布里渊区未填满才非整数, 因此边界呈现金属态. 而就 Quantum Spin Hall 而言:

Insulator



边界.



E_F



我费米面取
这里仍可使边
界绝缘, 一定要有一
个叉使边界金属态.

QHE 边缘态是自旋简并边缘态; QSH 是两条自旋非简并的态. 关键是一定要有一个叉, 中间交叉点严格保护. 不同于石墨. 石墨的叉对应 π 每条都两重简并, 中间四重简并; 现在要中间二重简并.

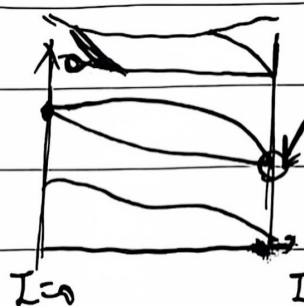
回忆时间反演算符 Θ 及 Kramers 简并, 回顾时间反演不变点.

$H(k=0)$ $H(0,0)$ $H(0,\pi)$ $H(\pi,0)$ $H(\pi,\pi)$ 满足 2-D.

$H(\vec{G} + H_0)$ 同 H 成为不变点

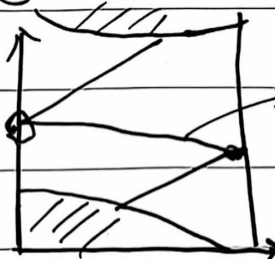
(Homework, 3-D situation) Kramers 在这些点至少二重简并

Situation 1. $\nu=0$



每个点时间
反演 2 重简并.
满足 Kramers 定理

Situation 2 $\nu=1$



边缘态

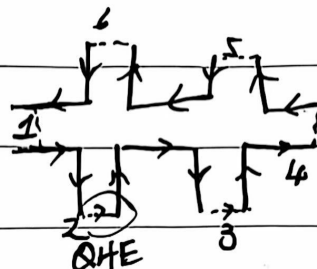
但是我动 E_F 从下往上走. Situation 1 有金属边缘态. 有绝缘边缘态. 其性质随 E_F 而变, 一般边缘态; 而 Situation 2 一直金属态, 且费米能级对 Situation 1 交点恒为偶数; Situation 2 恒为奇数; 奇数拓扑不平凡; 从理论上说, 可定义矩阵 $W_{mn}(\vec{k}) = \langle u_m(-\vec{k}) | \Theta | u_n(\vec{k}) \rangle$ 反映宇称结构. 要实现 Situation 2 计算所有时间反演点所有能带宇称相乘其必经历反转.

测量 QSH E; 利用 6 通系统, 电流 1 入而 4 出 $I_1 = -I_4$.

$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \dots$ 在边界上电流. Spin 从中流动.

$$I_2 = \frac{e^2}{h} \sum_j [T_{j2} V_2 - T_{2j} V_j]$$

T_{ij} 矩阵代表穿透率, i, j 相邻才有值 ($T_{23}, T_{16} \dots$ 不相邻无电流过)

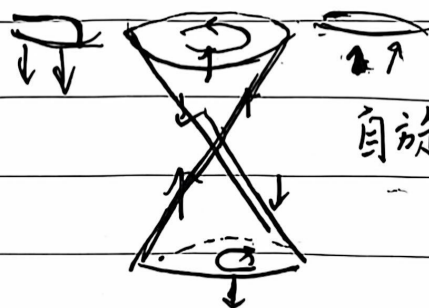


$$T: \begin{pmatrix} \bullet & 1 & & & & \\ 1 & \ddots & & & & \\ & \ddots & 0 & & & \\ 0 & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \\ 1 & & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (I)_{6 \times 1} = \frac{e^2}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & \ddots & & & & \\ & \ddots & 0 & & & \\ 0 & & \ddots & & & \\ & & & -1 & & \\ -1 & & & & -1 & 2 \end{pmatrix} (V)$$

代入 $I_1 = -I_4$ $I_2 = I_3 = I_5 = I_6 = 0$. 测量是 2.3 电势差 $V_{23} = V_2 - V_3$.

计算得 $V_{23} = \frac{h}{2e^2} I_1$. $\therefore G_{QSH E} = 2 G_{QHE} = \frac{2e^2}{h}$

测量装置决定出 2 倍



三维拓扑绝缘体 QSH E

2D $\rightarrow \mathbb{Z}_2$ invariant

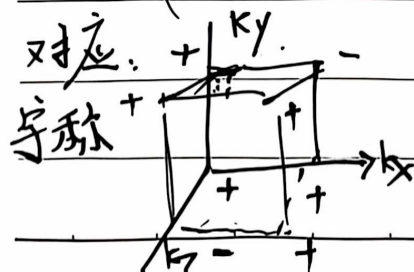
3D $\rightarrow ?$

2D. 4 时间反演不变点相乘出 $\mathbb{Z}_2$ invariant

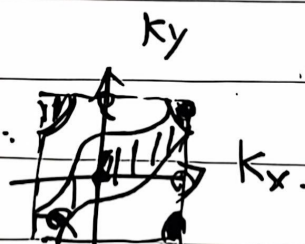
3D 8 时间反演不变点, 每四个于一平面可相乘, 出 4 个 $\mathbb{Z}_2$ 不变量.

1 个为主 ν_0 . 3 个 $\nu_{1,2,3}$ 表示 xy, yz, xz 面.

比如 $(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = (1, 1, 1)$



对应能带切面.



从白区至阴影区拓扑数变, 中有金属态.

拓扑超导体 [Topological Superconductor]

$H_{\text{superconductor}} + H_{\text{normal}}$ 组成 $H_{\text{Topo-super}}$.

H_{normal} : $H = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}, \sigma} C_{\mathbf{p}\sigma}^{\dagger} E(\mathbf{p}) C_{\mathbf{p}\sigma} + \text{h.c.} + (-) C_{-\mathbf{p}\sigma}^{\dagger} E(\mathbf{p}) C_{-\mathbf{p}\sigma} + \text{h.c.}$

$E(\mathbf{p}) = (\frac{p^2}{2m} - \mu)$ 正常色散. 能带 

$H_{\text{superconductor}}$ According to BCS theory:

$$H_{\text{BCS}} = \sum_{\mathbf{k}\sigma} E_{\mathbf{k}} C_{\mathbf{k}\sigma}^{\dagger} C_{\mathbf{k}\sigma} + \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} C_{\mathbf{k}\uparrow}^{\dagger} C_{-\mathbf{k}\downarrow}^{\dagger} C_{-\mathbf{k}'\downarrow} C_{\mathbf{k}'\uparrow}$$

Using Mean-Field:

$$H_{\text{BCS}}^{\text{MF}} = \sum_{\mathbf{k}\sigma} E_{\mathbf{k}} C_{\mathbf{k}\sigma}^{\dagger} C_{\mathbf{k}\sigma} - \sum_{\mathbf{k}} \Delta_{\mathbf{k}} C_{\mathbf{k}\uparrow}^{\dagger} C_{-\mathbf{k}}^{\dagger} - \sum_{\mathbf{k}} \Delta_{\mathbf{k}}^* C_{-\mathbf{k}\downarrow} C_{\mathbf{k}\uparrow}$$

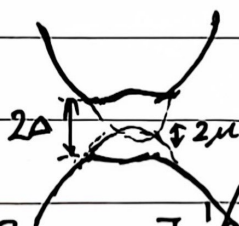
$\Delta_{\mathbf{k}} = - \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \langle C_{-\mathbf{k}\downarrow} C_{\mathbf{k}\uparrow} \rangle$ pairing potential.

此两项相加.. H_{BdG} : $H_{\text{normal}} + H_{\text{MF-BCS}}$

$\mathcal{H} = \sum_{\mathbf{p}} \Psi_{\mathbf{p}}^{\dagger} H_{\text{BdG}}(\mathbf{p}, \Delta) \Psi_{\mathbf{p}}$. $\Psi_{\mathbf{p}} = (C_{\mathbf{p}\uparrow}, C_{\mathbf{p}\downarrow}, C_{-\mathbf{p}\uparrow}^{\dagger}, C_{-\mathbf{p}\downarrow}^{\dagger})^T$

$$H_{\text{BdG}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} E(\mathbf{p}) & 0 & 0 & \Delta \\ 0 & E(\mathbf{p}) & -\Delta & 0 \\ 0 & -\Delta^* & E(\mathbf{p}) & 0 \\ \Delta^* & 0 & 0 & E(\mathbf{p}) \end{pmatrix}$$

H_{BdG} 能带:

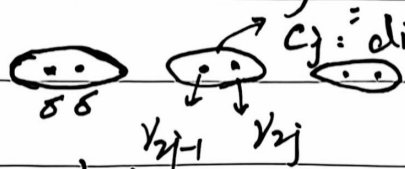


$$E_{\pm} = \left[\left(\frac{p^2}{2m} - \mu \right)^2 + \Delta^2 \right]^{1/2} (\pm)$$

比如 Δ 与 $\mathbf{p}$ 的关联在
p-wave 超导体中 $\Delta(\mathbf{p}) = \Delta \cdot \mathbf{p}$.
则 $E_{\pm} = \sqrt{\left(\frac{p^2}{2m} - \mu \right)^2 + \Delta^2 p^2 (\pm)}$
据此改 Δ 大小, μ 正负
可得不同能带.

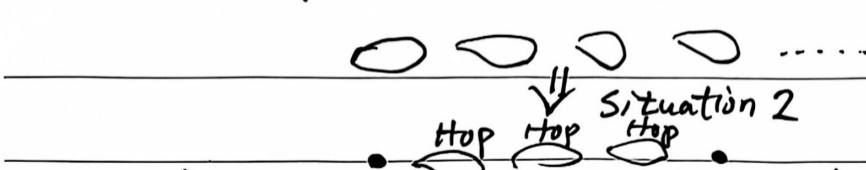
我们知道拓扑绝缘体边缘态那个又为金属性QSH; Now
 拓扑超导体边缘态那个又称 Majorana 费米子. (spinless)
 利用 spinless majorana 算符 $d=d^\dagger$ 才成立. 有了自旋的自由
 度 $d = ac_\uparrow + bc_\downarrow$ $d^\dagger \neq d$ 故此种 s-wave 不可. 一般 p-wave 中可
 找到 spinless mode.

1-D lattice gapless modes.

定义 C : $\{C_i^\dagger, C_j\} = \delta_{ij}$ 定义: γ : $\gamma_j^\dagger = \gamma_j$. $\{\gamma_j^\dagger, \gamma_j\} = 2\delta_{jj}$
 那么 γ_j 可以定义为: $C_j = (\gamma_{j-1} + i\gamma_j)/2$, cooper 对:


重写 H_{BdG} 用 γ 算符.

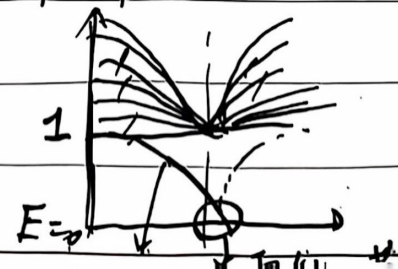
$H_{BdG} = (i/2) \sum_j -\mu \gamma_{j-1} \gamma_j + (t+|\Delta|) \gamma_j \gamma_{j+1} + (-t+|\Delta|) \gamma_{j-1} \gamma_{j+2}$
 ① $\mu < 0$. $|\Delta| = t = 0$. $\gamma_{j-1} \gamma_j$ 同-dimer, 同一格点 Quasi 不产生新激发
 ② $\mu = 0$ $|\Delta| = t > 0$. $\gamma_j \gamma_{j+1}$  相邻 Flopping
 系统有边界, 一定多出来一个粒子 γ_j



此二粒子处于边缘态, 此种边缘激发 Majorana 零能模

2D spinless Chiral p-wave

$H_{BdG} = \frac{1}{2} \sum_P \Psi_P^\dagger \begin{pmatrix} \epsilon_{CP} & \Delta(C_P + iC_P) \\ \Delta^*(C_P - iC_P) & -\epsilon_{CP} \end{pmatrix} \Psi_P \cdot E$
 结论: 一维边界上有巡游 MF
 vortex core 上有零能模



Possible Topological Superconductor

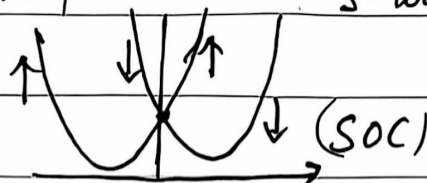
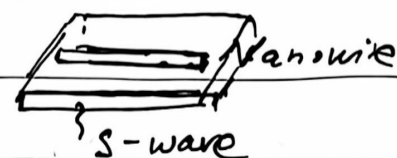
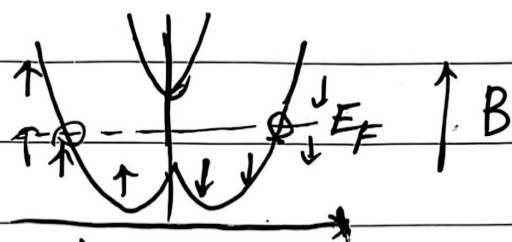
① P-wave. Sr_2RuO_4 . (Time-Reversed Broken $\Rightarrow$ Kerr Effect)

Really?

实验进展 [Experimental Procedure]

① 1-D $\Rightarrow$ 关键 spinless. 利用 Nanowire

通过 S-wave superconductor 引诱 Nanowire

S-wave 诱发 S-wave, 而由于 Nanowire 中
自旋-轨道耦合, $\uparrow, \downarrow$ 劈裂此时用外场打开 Gap. 而把费
米能级居于 Gap 中, 如图则凡诱发 $k > 0$ 皆 spin $\downarrow$. 凡诱发 $k < 0$ 皆 spin $\uparrow$. 取 Nanowire测定 k 分类 $k > 0$ part, 则皆 spin $\downarrow$ 则 spinless.

At $p=0$, $E_g = B^2 - \sqrt{\Delta^2 + u^2}$, 则调整 B or u . 让某个
Gap E_g 上下反转 $E_g < 0$. 负 Gap 意味新的拓扑超导态
要寻找 Majorana Fermion, 要找量子电导, 而非杂质散射电导.

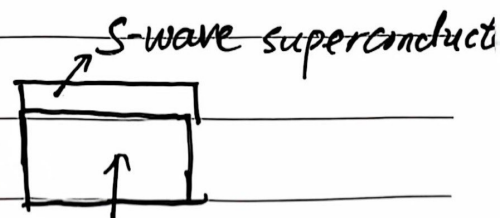
[Quantized Majorana conductance] 10.1038/nature26142.

Really? 至今尚未实现

② 2-D 拓扑绝缘体表面态 ~~↑/↓~~ 不管 E_F 在哪里, 必激发 $k > 0$
spin $\uparrow$; $k < 0$ spin $\downarrow$ 自然 spinless

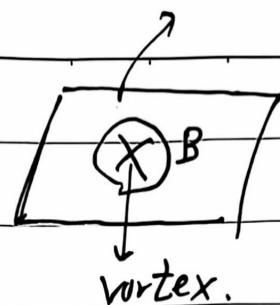
Topological insulator 边缘态为 S-wave SC.

诱发 X cooper pair 为 spinless



Topological insulator.

因此在 s -wave superconductor 的边缘(四条边)上存在 Majorana, 但难测. 通过加磁场形成 vortex, vortex 的中心亦为此 s -wave superconductor 边缘态, 即 vortex 中心有一 Majorana. 即实验可测中心有一个量子电导峰.



③ 2-D 量子反常霍尔异质结 (QAHE)

$\Rightarrow$ Possible Chiral Majorana Fermion Really?

④ 3-D Cu-doped Bi_2Se_3 .

宏观测量有量子电导峰而微观测不到

⑤ 铁基超导 (iron-based)

虽然金属, 但是有局域能隙的翻转, 则出现表面态.

体态 SC $\Rightarrow$ 表面态 SC $\Rightarrow$ 边缘 or vortex 有 Majorana.

Majorana 零能模. 拓扑量子计算.

(Zero-modes) Topological Quantum Computation.

Abelian & NonAbelian Anyon.

Fermion $|\phi_1 \phi_2\rangle = -|\phi_2 \phi_1\rangle$ Boson $|\phi_1 \phi_2\rangle = |\phi_2 \phi_1\rangle$

Abelian Anyon $|\phi_1 \phi_2\rangle = e^{i\theta} |\phi_2 \phi_1\rangle$

NonAbelian Anyon $|\phi_1 \phi_2\rangle = U |\phi_2 \phi_1\rangle$

$2N$. vortex, i.e. $2N$ 零能模. 两两两对组成费米算符.

$$f_i = (\gamma_{2i-1} + i\gamma_{2i})/2$$

$$n_i = f_i^\dagger f_i \quad n_i = 0 \text{ or } 1$$

Ground State 2^N degeneracy $\Phi = |n_1 \dots n_N\rangle$

回忆 Majorana 代数. Now 交换 γ_1, γ_2 .

回忆 A-B Effect. 交换 $\gamma_1, \gamma_2 \Leftrightarrow$ 交换 γ_1, γ_2 代表的 2 个 vortex.

双连通区不能同时做, 先后做必加一负号

$$\gamma_1 \rightarrow -\gamma_2, \quad \gamma_2 \rightarrow \gamma_1.$$

只考虑 γ_1, γ_2 两个. 确定 n_1 量子数.

$\Rightarrow$ 定义 U : $U_{12} = (1 + \gamma_1 \gamma_2)/\sqrt{2}$, 则
 $U_{12} \gamma_2 U_{12}^\dagger = -\gamma_1$ 交换负号

交换 γ_1, γ_2 . $U_{12}|0\rangle = e^{i\pi/4}|0\rangle$ 仅多一相位.

$$U_{12}|1\rangle = e^{-i\pi/4}|1\rangle$$

再次利用定义 U_{ij} 的形式. 应用 4 个 γ . $|n_1, n_2\rangle$ 态.

交换有几种 $|n_1, n_2\rangle \rightarrow U_{12}|n_1, n_2\rangle$.

$$|n_1, n_2\rangle \rightarrow U_{23}|n_1, n_2\rangle$$

$$|n_1, n_2\rangle \rightarrow U_{34}|n_1, n_2\rangle$$

$|n_1, n_2\rangle$ 仅交换 U_{12} U_{34} . 变一相位.

但若交换 2, 3.

$$|n_1, n_2\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|n_1, n_2\rangle + i(-1)^{n_1} |1-n_1, 1-n_2\rangle)$$

$$U_{23}|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + i|11\rangle)$$

$$U_{34}|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (1+i)|00\rangle$$

$$U_{12}|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (1+i)|00\rangle$$

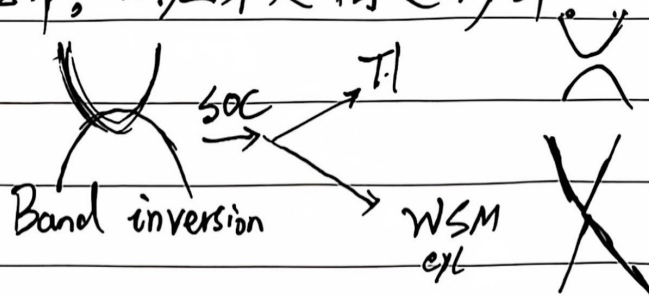
→ 非阿贝尔特性. $[U_{2n,i}, U_{i,i+1}] = \gamma_{i-1} \gamma_{i+1}$

$$[U_{12}, U_{34}] = 0$$

即若已知末态, 我便知交换的所有路径. 可以此定义拓扑量子计算的 Qubit $|\bar{0}\rangle = |00\rangle$ $|\bar{1}\rangle = |11\rangle$

拓扑半金属 (Topological Semimetal)

金属 K 点未充满. 区域积分非整数, 难呈现拓扑性质. 然而, 金属色散 $\times E_F$ 恰 E_F 落在点上. $\Omega_{\text{Fermi surface}} = 0$. 虽金属而不激发; 或利用分层逐层计算材料体 Z_2 (eg. 定死 Z_1 算此层 Z_2 . 在此层中出现 $Z_2 = -1$ 可能, 则沿 Z_1 方向 (or 在体内某处) 会存在这样一个 $\times$ 能带, 对应某处高迁移率.



$\gamma_2 \gamma_1 \gamma_0$

(to be found)

Fermi Surface
2-D



表面-体态

不再区分了

因其仅存在于内

部, 对特定范围才有“边缘态”

关键是找 $\times$ Dirac point. 一种方法磁性 $\times$ 拉开; 未找到; 另外
 用 Bond-inversion system, 故至少 2 个点. Na_3Bi

Example: Na_3Bi

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle^*$$

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \langle \psi_2 | \psi_1 \rangle^* \quad (1)$$

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \langle \psi_2 | \psi_1 \rangle^* \quad (1)$$

Example: Na_3Bi