

Lieb-Kitaev model DMRG calculation

DMRG benchmark

晶格与哈密顿量均与[1]Xingyao Guo, Xinglei Ma, Xuzhe Ying, K. T. Law. Majorana Zero Modes in the Lieb-Kitaev Model with Tunable Quantum Metric arXiv:2406.05789 相同，还没有加相互作用。在计算的测试中，通过调整标号顺序减少标号相差较大的数之间的纠缠并不能显著加快计算，更改 t 的大小并不能显著加快计算。计算准确取决于sweep的数目，计算快慢只取决于尺寸的大小，少sweep几次，只要达到了bond dimension的要求，马约拉纳波函数误差很小。

对于观测量，下面两种方法都可以得到观测量 $\langle c_j \gamma_L \rangle$ ：

```
// siteindex是spinless fermion, psi是DMRG得到的基态, A算符是fermion算符
// 这是该算符的前半部分
for(int j = 2; j < N-1; ++j)
{
    auto Adag_i = op(sites, "Adag", 1);
    auto A_j = op(sites, "A", j);
    psi.position(1);

    auto psidag = dag(psi);
    psidag.prime();
    auto Cij = psi(1)*Adag_i*psidag(1);

    for(int k = 2; k < j; ++k)
    {
        Cij *= psi(k);
        Cij *= op(sites, "F", k); //Jordan-Wigner string
        Cij *= psidag(k);
    }

    auto lj = rightLinkIndex(psi, j);
    Cij *= prime(psi(j), lj);
    Cij *= A_j;
    Cij *= psidag(j);

    auto result = elt(Cij) ;
    outfile3 << j+j << "\t" << result << std::endl;
}
```

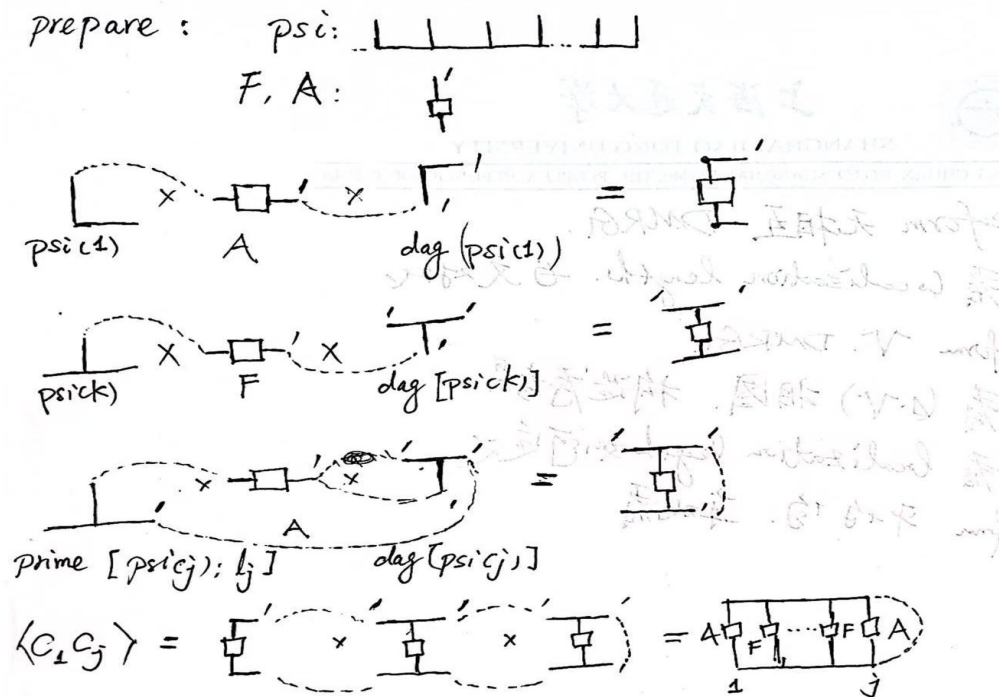
p-wave超导不考虑自旋，以spinless fermion作为基定义了 C 算符，以 C 算符定义了观测量。这种方法通过张量缩并得到观测量，关键点是spinless fermion的基使用费米算符需要做Jordan-Wigner transformation，体现在程序里是一连串的 $F_i = (-1)^{n_i}$ 算符，注意最后整体还有一个正负号。

$$\begin{aligned} c_i c_j &= (F_1 F_2 \cdots F_{i-1}) a_i (F_1 F_2 \cdots F_{j-1}) a_j \\ &= F_1^2 F_2^2 \cdots F_{i-1}^2 (a_i F_i) F_{i+1} \cdots F_{j-1} a_j \\ &= -a_i F_{i+1} \cdots F_{j-1} a_j \end{aligned}$$

类似的，对于 $i < j$ ：

$$c_i^\dagger c_j = a_i^\dagger F_{i+1} F_{i+2} \cdots F_{j-1} a_j$$

$$c_i c_j^\dagger = -a_i F_{i+1} F_{i+2} \cdots F_{j-1} a_j^\dagger$$



```
// siteindex是spinless fermion, psi是DMRG得到的基态, C算符是hard-core boson算符
for(int j = 1; j <= N; ++j)
{
    auto ampo3 = AutoMPO(sites) ;
    ampo3 += 1, "C", 1, "C", j;
    G1 = toMPO(ampo3);
    auto ampo4 = AutoMPO(sites) ;
    ampo4 += 1, "Cdag", 1, "C", j;
    G2 = toMPO(ampo4);
    auto wave1 = inner(psi , G1 , psi) ;
    auto wave2 = inner(psi , G2 , psi) ;
    auto majorana= wave1 + wave2 ;
    printfln("Site %d occupation: %.5f", j, majorana);
}
```

第二种方法是用程序包里的 *AutoMPO* 直接定义一个 *MPO*, 计算其期望, 这个方法的好处是简单, 而且对于 **spinless fermion** 有自带的经过了 **Jordan-Wigner transformation** 的 *C* 算符(注意前一种方法没有), 缺点是没有直接缩并快。

下面是计算纠缠熵的方法:

```
for(int b = 2 ; b < N-1; ++b )
{
    psi.position(b);
    auto l = leftLinkIndex(psi,b);
    auto s = siteIndex(psi,b);
    auto [U,S,V] = svd(psi(b),{l,s});
    auto u = commonIndex(U,S);

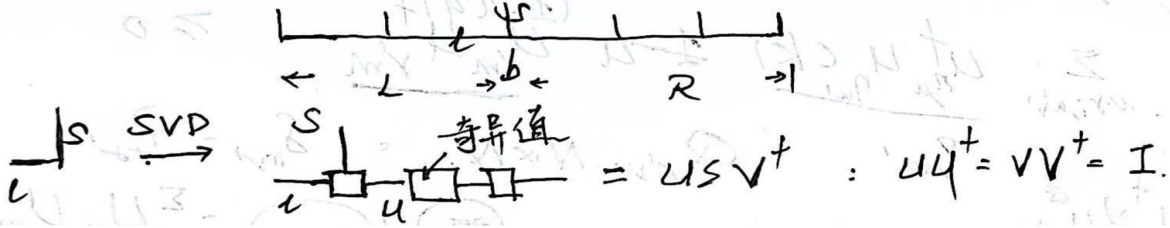
    Real SvN = 0.;
```

```

for(auto n : range(1,dim(u)))
{
    auto Sn = elt(S,n,n);
    auto p = sqr(Sn);
    if(p > 1E-12) SvN += -p*log(p);
}
}

```

prepare: 最后一个 sweep 到 b 处, 左右正交的 psi 形式.



$$\begin{aligned}
 |\psi\rangle &= L_b U S V^+ R_b \quad (L L^+ = R R^+ = I) \\
 T_{rL} \varphi &= T_{rL} (U S V^+ R^+ R V S^+ U^+) \\
 &= \text{Tr}(S S^+) = \text{Tr}[\lambda_\alpha^2] \\
 S_R &= -\sum_\alpha \lambda_\alpha^2 \ln \lambda_\alpha^2
 \end{aligned}$$

Majorana wave function

为了类比文章中的结论, 需要得到马约拉纳波函数, 从衰减长度得到 QML 。在 ED 里面, 可以通过求解出所有的本征值, 直接观察到有两个接近零的本征能量, 提取其本征向量得到马约拉纳波函数。

用 DMRG 的方法, 则需要计算什么函数是第一个问题。马约拉纳波函数可以从马约拉纳算符作用到基态的激发来定义, 问题是马约拉纳算符有原始的定义:

$$\begin{aligned}
 \gamma_L &= \sum_i \phi_{Li} (c_i^+ + c_i) \stackrel{?}{=} c_1 + c_1^+ \\
 \gamma_R &= \sum_i \phi_{Ri} (c_i - c_i^+) \stackrel{?}{=} -i(c_L - c_L^+)
 \end{aligned} \tag{1}$$

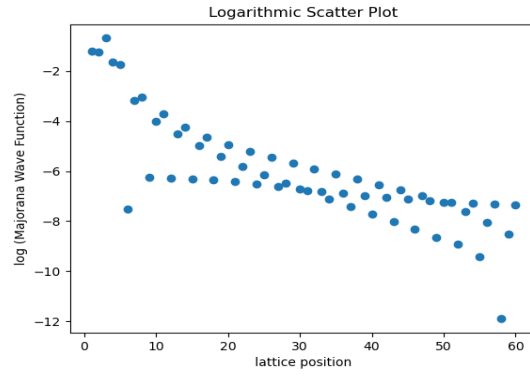
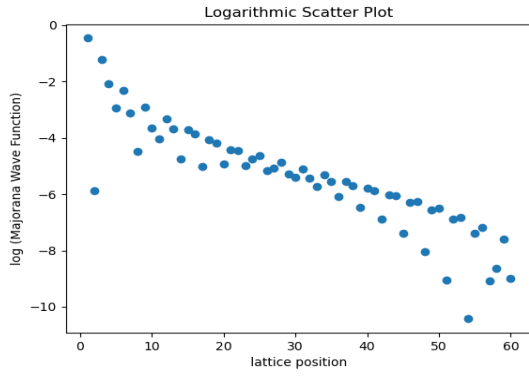
如果按照这样定义函数, 可以得到马约拉纳波函数, 但同时为零。

$$\begin{aligned}
 \langle c_j^+ \gamma_L + \gamma_L c_j^+ \rangle &= \langle \delta_{ji} \cdot \phi_{Lj} \cdot c_j^+ c_i^+ + c_j^+ c_i + c_i^+ c_j^+ + c_i c_j^+ \rangle \\
 &= \phi_{Lj} \langle 2c_i^+ c_i^+ + 1 \rangle = \phi_{Lj} \\
 &\stackrel{?}{=} \langle c_j^+, c_1 + c_1^+ \rangle_{\text{反对易}} = 0
 \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
 \langle c_j^+ i \gamma_R + i \gamma_R c_j^+ \rangle &= \langle \delta_{ji} \cdot \phi_{Rj} \cdot (-c_j^+ c_i^+ + c_j^+ c_i - c_i^+ c_j^+ + c_i c_j^+) \rangle \\
 &= \phi_{Rj} \langle -2c_i^+ c_i^+ + 1 \rangle = \phi_{Rj} \\
 &\stackrel{?}{=} \langle c_j^+, c_L - c_L^+ \rangle_{\text{反对易}} = 0
 \end{aligned} \tag{3}$$

这个定义来源于这篇文章 [2] Interaction Effects in Topological Superconducting Wires Supporting Majorana Fermions 的 section 3.A 公式 13. 这篇文章里的“陷阱”就是没有具体写出 γ_L 的形式。

关键就是考虑 γ_L 的定义问题。下面两张图是按照下文观测量定义代入不同的两个马约拉纳算符时马约拉纳波函数左半支的情况, 左边的 $\gamma_L = c_1 + c_1^+$ 。因为是多带起始点选取在哪里呢? 右边的 $\gamma_L = c_3 + c_3^+$ 。这两张图有差异。物理上 Kitaev 模型之所以定义了马约拉纳算符 $c_1 + c_1^+$, 因为这个算符和哈密顿量对易, 所以有零能的激发。实际上第一个等式在 Kitaev 模型是成立的, 因为激发一个局域的 majorana, 就是费米子表象下激发了一个零能波函数。这里文章里都投影到单带表象, 不用考虑这个问题, 虽然有“近似零能”的激发, $\gamma_L = c_1 + c_1^+$ 或 $\gamma_L = c_3 + c_3^+$ 因为带间作用 J 的存在都不和哈密顿量对易。



文献这个定义类似于 $\langle (c_j^+ - c_j)i\gamma_R \rangle = \langle i\gamma_{2j}\gamma_R \rangle$ 数值上得到的就是全都是零。这是因为数值计算必须要选择一个 γ_L ，不得不选择 $c_1 + c_1^+$ 或 $c_3 + c_3^+$ ，而真实的和哈密顿量对易的算符并非局域，而是衰减，选取那个作为观测量可以得到非零的准确的函数，但是那样一来是循环论证，二来等价于严格对角化问题已经解决了。

反而是这样的观测量定义得到了类似于马约拉纳波函数的形式，测量 $\langle c_j i\gamma_R \rangle$ 与 $\langle c_j \gamma_L \rangle$ 对应了左右半支，虽然数学上面：

$$\langle c_j i\gamma_R \rangle = \left\langle c_j \sum_i \phi_{Ri} (c_i - c_i^+) \right\rangle \neq \phi_{Rj}$$

这个定义来源于这篇文章 [3]Majorana zero modes and long range edge correlation in interacting Kitaev chains: analytic solutions and density-matrix renormalization-group study 的公式12a，但是可以近似的认为是对的。最简单的原因就是就考虑上面的半支，逃掉了对易为零，那么随便选取 γ_L 的形式都非零了，另一方面：

$$\left\langle c_j \sum_i \phi_{Ri} (c_i - c_i^+) \right\rangle = \sum_i \phi_{Ri} \langle c_j \gamma_i \rangle = \sum_i \phi_{Ri} \langle 1_{j,fermion} | 1_{i,majorana} \rangle \approx \phi_{Rj}$$

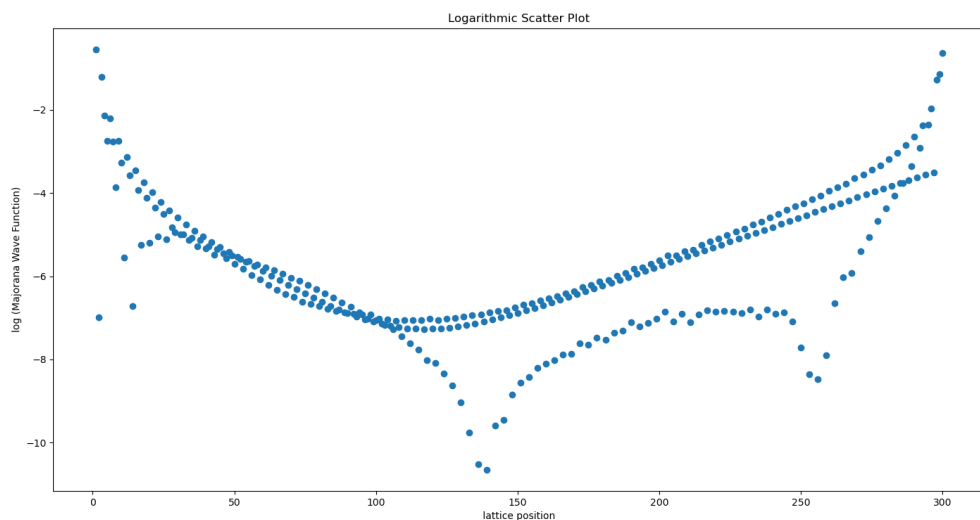
约等号的原因在于， i 处激发的majorana是内部的，并非零能模，而是粒子空穴对，激发到了非平带的导带和价带一对粒子空穴。因此和平带QML无关，具有普通超导激发的BCS衰减长度，是非常局域的。所以它和 j 处费米型的激发的overlap可以近似视作delta函数，所以近似于 ϕ_{Rj} 。

并且在计算当中，选定的马约拉纳算符和该式是近似的：

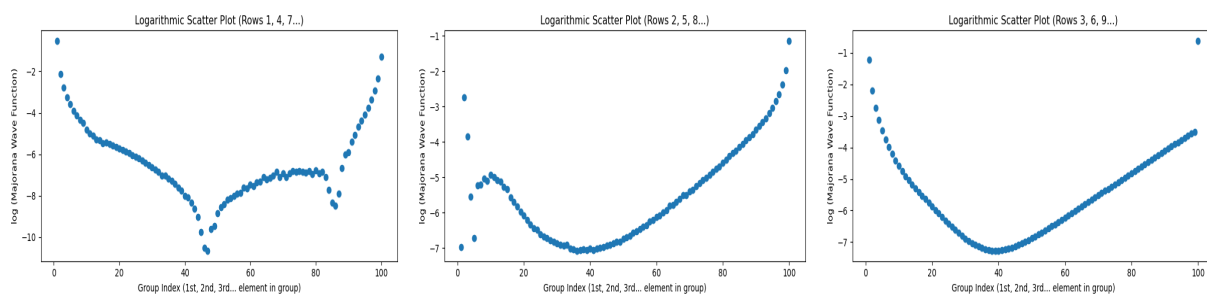
$$\left\langle c_j \sum_i \phi_{Ri} (c_i - c_i^+) \right\rangle \approx \langle c_j (c_N - c_N^+) \rangle$$

这仍然是因为BCS局域长度，对于式子 $\sum_i \phi_{Ri} \langle c_j \gamma_i \rangle$ ， ϕ_{RN} 为主体， ϕ_{RN-3} 由于BCS局域长度贡献该式只为前者的千分之一，因此只要考虑边缘的这一部分就可以了。

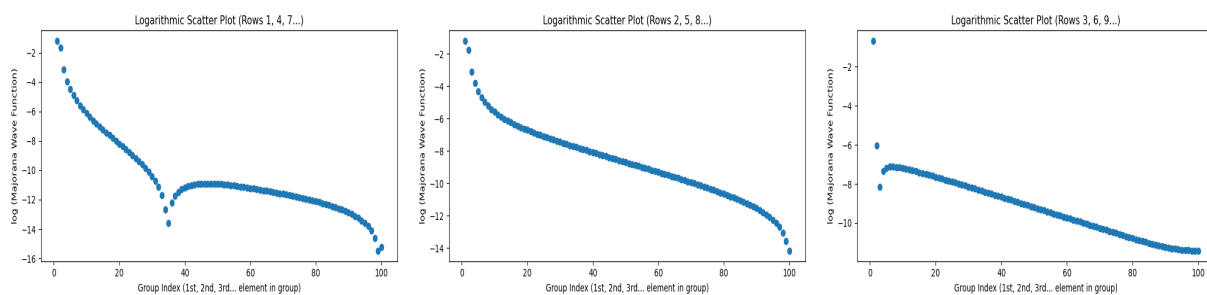
DMRG去计算这个观测量，有着类似majorana波函数的形式。将左右两支合起来，参数为 $J = 1, V = 0.1, N = 100 \times 3$ 。理论[1]上，QML衰减长度为 $\xi_+ = \sqrt{2}aJ/V = \sqrt{2} \cdot 10 \cdot 3 = 42.4$ 。下面是对波函数取ln，问题是如何从这张图中提取出 localization length 的信息。



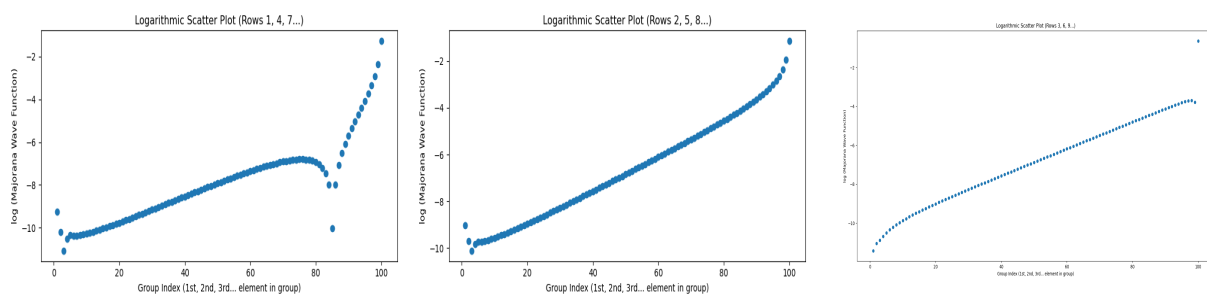
不同零能马约拉纳算符的选取，不同 c_j 的选取，结果有差异。下面是三个带分列的图,左右两个衰减有差异：



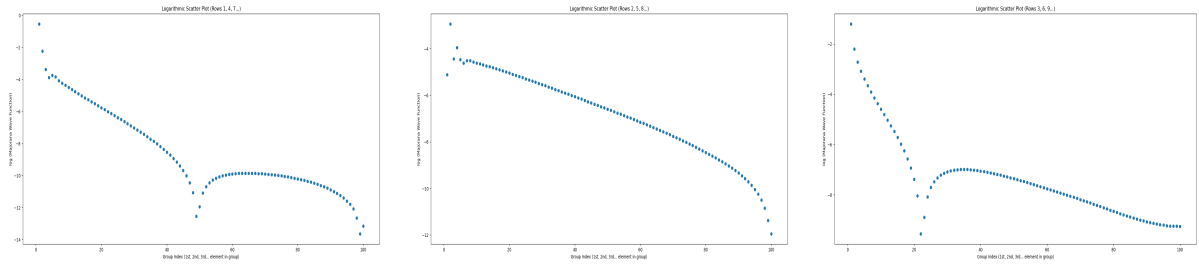
下面是三个带分列的图,只显示左半支 $\gamma_L = c_3 + c_3^+$ ，后面两张图 $k^{-1} = 47.1$ 与 58.4 ：



下面是三个带分列的图,只显示右半支 $\gamma_R = -i(c_N - c_N^+)$ ，后面两张图 $k^{-1} = 41.4$ 与 42.6 ：

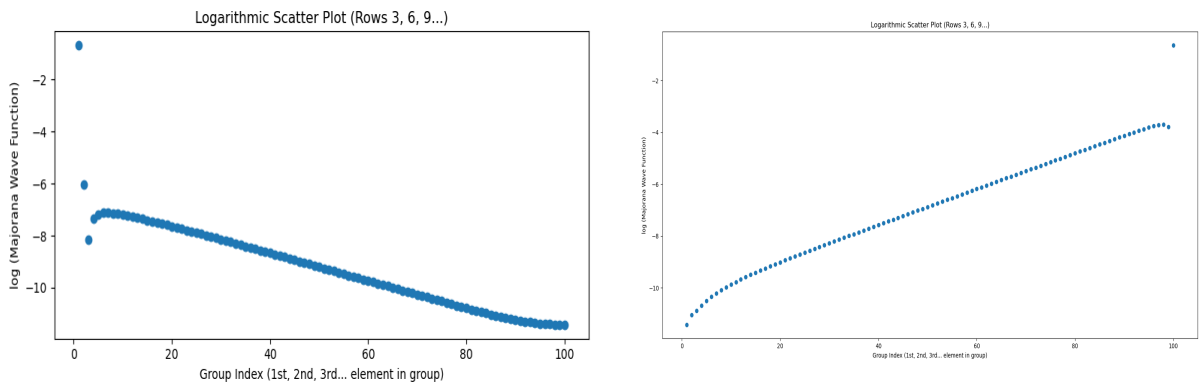


下面是三个带分列的图,只显示左半支 $\gamma_L = c_1 + c_1^+$ ，中间图 $k^{-1} = 55.4$



对于**lieb-kitaev**模型而言， A 子晶格上面有化学势 $+V$ ， C 子晶格上面有化学势 $-V$ 。 A, B, C 轨道和能带对应，选取 B 轨道对应投影的平带激发。因此选取 $c_j = c_{3z}, \gamma_L = c_3 + c_3^+, \gamma_R = -i(c_N - c_N^+)$ 作为观测量算符。

选取了相应的**majorana**算符，上面斜率的差异和有限尺寸效应有关，理论预测的结果为42.4,下面是典型的**DMRG**得到的**majorana**波函数形式(左图，左支；右图，右支)：

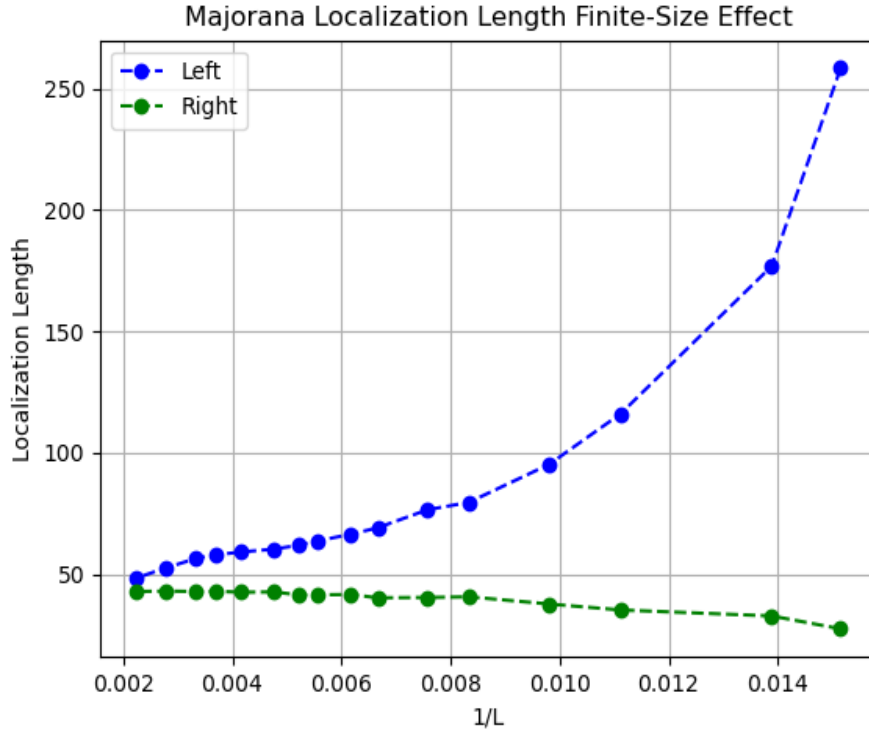


Left Majorana

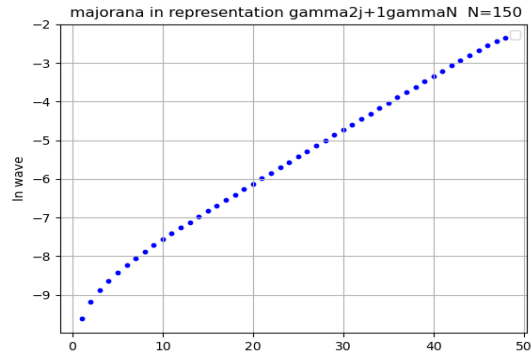
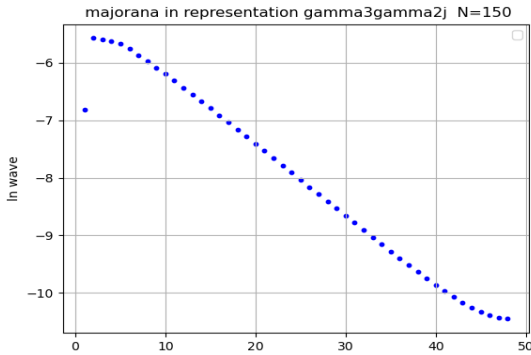
Size	60	66	72	90	102	120	132	150	162
Length	Wrong	258.5	176.9	115.9	95.18	79.55	76.51	69.12	66.43
Size	180	192	210	240	270	300	360	450	
Length	63.67	61.86	60.30	59.13	57.94	56.44	52.52	48.25	

Right Majorana

Size	60	66	72	90	102	120	132	150	162
Length	Wrong	27.45	32.76	35.24	37.70	40.65	40.38	40.24	41.61
Size	180	192	210	240	270	300	360	450	
Length	41.49	41.47	42.66	42.54	42.93	42.83	43.02	42.82	



接下来考虑马约拉纳的关联函数，当考虑算符 $\gamma_5 i \gamma_{2j}$ 其中 $\gamma_5 = c_3 + c_3^\dagger$, $i \gamma_{2j} = c_j - c_j^\dagger$ ；或者当考虑算符 $\gamma_{2j-1} \gamma_{2N}$ ，其中 $\gamma_{2j-1} = c_j + c_j^\dagger$, $i \gamma_{2N} = c_N - c_N^\dagger$ 为下面两张图的情况：



观察局域长度，和之前计算 $c_j i \gamma_R$ 一致，每一个格点的马约拉纳波函数的值为精确的计算 $c_j i \gamma_R$ 时的两倍，即 $\gamma_{2j-1} \gamma_{2N} = 2 c_j i \gamma_{2N}$ ，得到：这似乎和马约拉纳算符为零能激发，保持粒子空穴对称性，所以对于 c_j 和 $c_j^\dagger$ 对称有关。

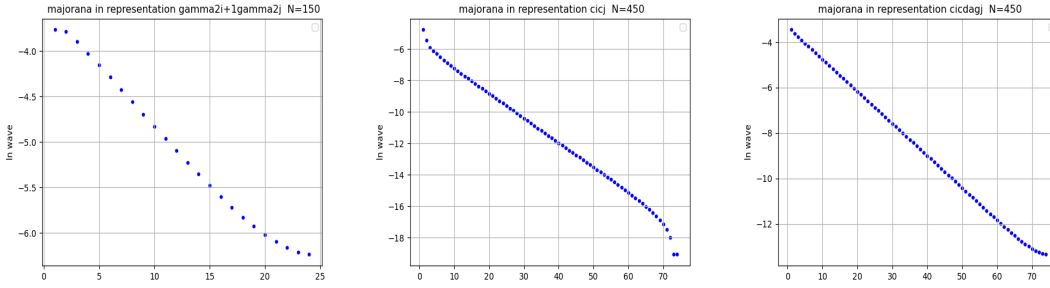
$$\langle c_j i \gamma_{2N} \rangle = - \langle c_j^\dagger i \gamma_{2N} \rangle \quad (\text{真的吗}) \quad \text{看下文}$$

观察内部的情况，即算符 $\gamma_{2i-1} i \gamma_{2j}$ 结果仍然和边界类似，并不只有BCS的衰减长度。更进一步，还可以观察以下观测量在内部的情况，可以观察到在 $\langle c_i c_j \rangle$ 中BCS衰减长度明显，QML衰减都存在。对于既有BCS又有QML衰减长度，可以从原始的波函数形式看出来，占大头的衰减项只和相对距离有关，有某种“无记忆性”。

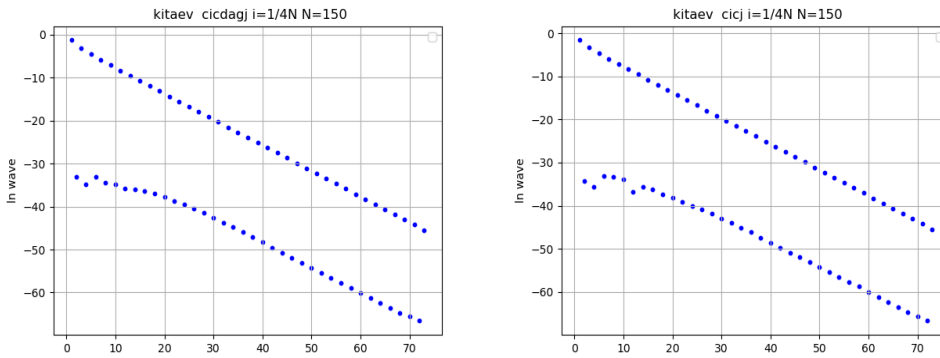
$$\psi_R(x_j) = A_R^{\text{QM}} \exp\left[-\frac{(N-j)a}{\xi_+}\right] + A_R^{\text{BCS}} \exp\left[-\frac{(N-j)a}{\xi_{\text{BCS}}}\right]$$

$$\langle \psi | c_i c_j | \psi \rangle \approx e^{i-j}$$

QML	$\gamma_{2i-1} i \gamma_{2j}$	$c_i i \gamma_{2j}$	$c_i c_j$	$c_i c_j^\dagger$
length	24.05	22.86	17.02	21.23



这是利用观测量计算kitaev模型的 $c_i c_j$ 与 $c_i c_j^\dagger$ 在 $t \neq \Delta$ 的值，可以看到两者几乎没有区别，在斜率上满足BCS斜率预言,相对大小也一样。之所以出现两条线是因为波函数振幅 A_{BCS} 对于奇偶格点不同，有文献把它和“two coupled SSH-like chains”对比得到不同的振幅。

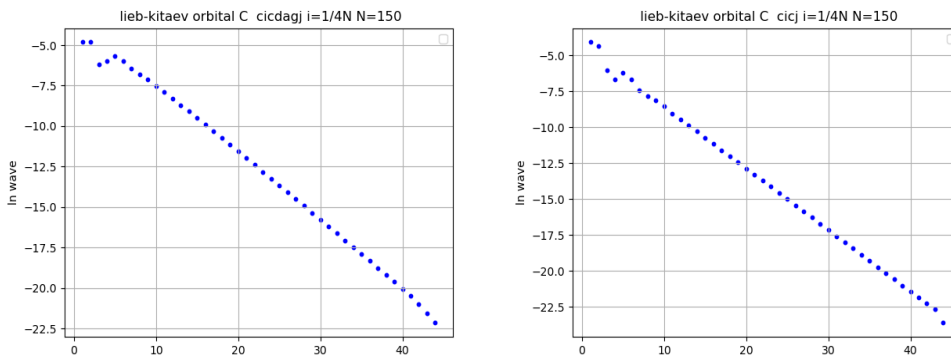


在lieb-kitaev模型中有两点和kitev链不同，第一就是斜率有微弱差异--这也许是因为有限尺寸效应。关键的第二就是两者在量级上相差 e^2 。这个作用就是来源于QML，更具体的，也许来源于耦合参数 J 。首先和 i 的选取无关，选取在哪里都是这样的。只要在上下带拓扑平庸相，中间带拓扑相时，都有这个结论。马约拉纳关联 $\gamma_{2i-1} i \gamma_{2j}$ 拆为以下四项：

$$\langle c_i c_j \rangle = \langle c_i^\dagger c_j^\dagger \rangle \text{ 小}$$

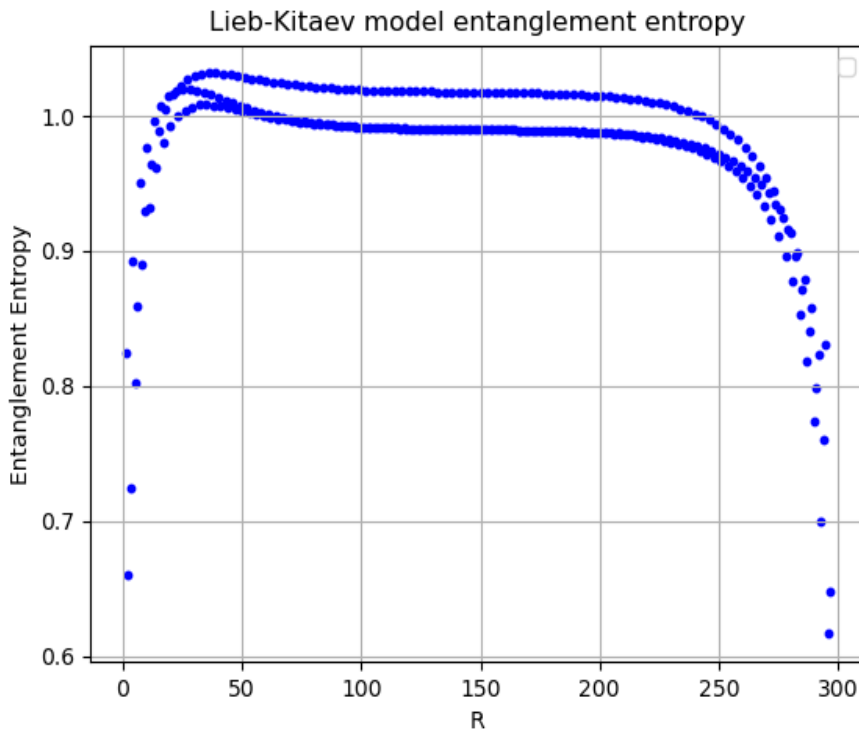
$$\langle c_i c_j^\dagger \rangle = \langle c_i^\dagger c_j \rangle \text{ 大}$$

就物理含义而言我做一些猜测。似乎说的是电子的密度关联大于电子的配对关联。如果基态是粒子空穴对称的，理应这两个值是相同的，因为那时候在 j 处不管是激发一个粒子还是一个空穴在 i 看来都是一样的。下面的图说明不论那条轨道都满足这个结论。总体来看，就是说马约拉纳基态的密度关联要大于配对关联，即使它有一个粒子空穴对称的能带，但是态并非如此。**问题：**是不是说这样的BCS哈密顿量硬加入了 J 这种密度配对项之后，本身粒子空穴对称就是强令处于nambubasis的数学结果，物理上并非如此？



Entanglement Entropy

对于参数 $J = 1, V = 0.1, t = 0.03, \Delta = 0.018, N = 100 * 3$ ，可以得到lieb-kitaev模型的典型纠缠熵：

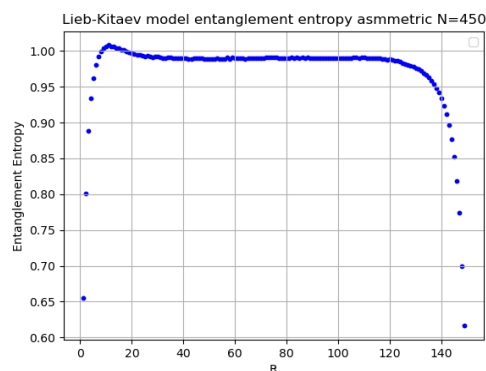
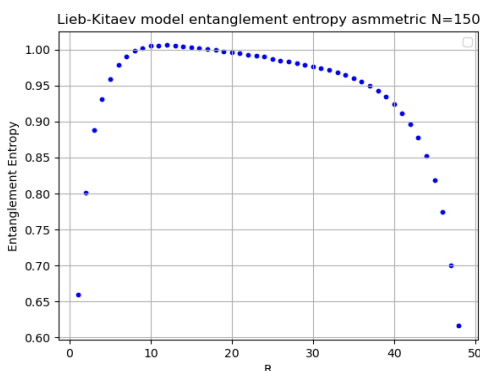
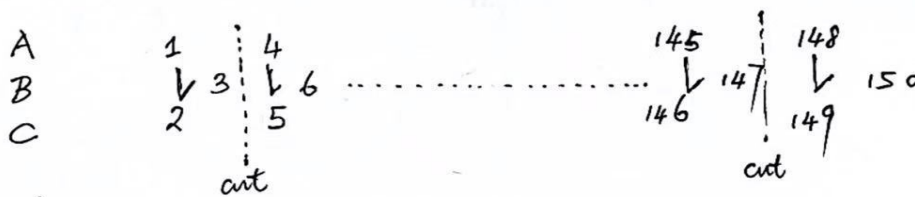


历史上, [4]Calabrese & Cardy (2004), 用CFT得到了一维纠缠熵的结论, [5]Levy & Goldstein (2019) 分析了Kitaev模型的纠缠, [4]太难了, [5]会给一些BCS框架下的结论:

对于纠缠熵的计算给出以下结论: 讨论初始体系格点奇偶性(fermion parity)对结果几乎没有影响; 讨论如果是一个完全对称的晶格, 采用完全对称的DMRG编号方式, 对于奇数偶数晶格略调晶格编号是指完全意义上的对称, 那么纠缠熵就是对称的, 可以看到明显的中间平台, 但是马约拉纳波函数扭曲没有原本优美, 因为晶格亏了一个; 讨论如果是一个原始的晶格不论序号的选取, bond的选取结论都和原本是类似的, 即一侧会凸出来一些。并且, 凸出来最小的并非完整原胞间的bond而是原胞内的一个bond, 是问题一。问题二: 这是否是有限尺寸导致的突起?

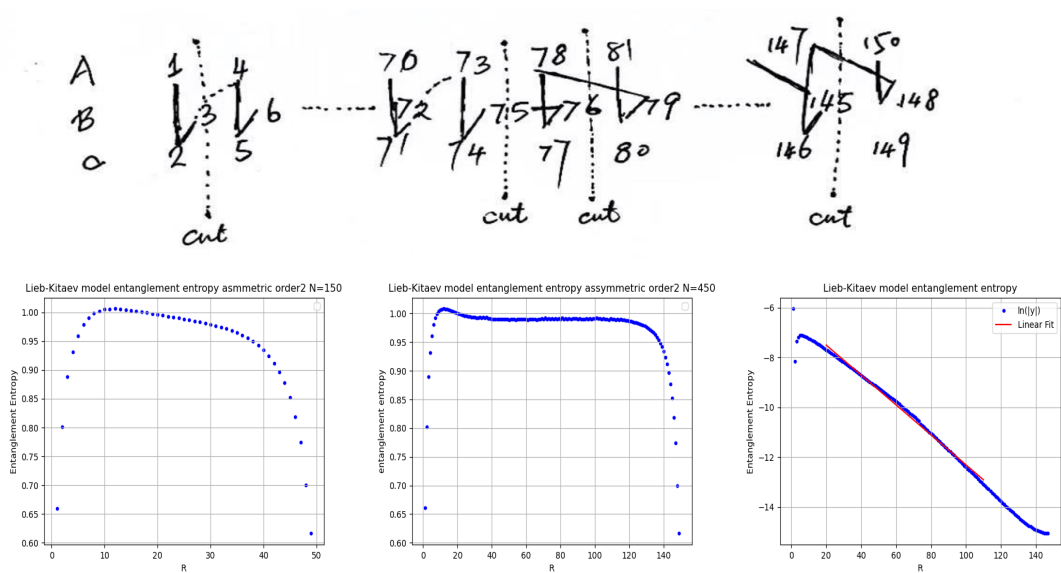
纠缠熵的计算中, 考虑晶格编号, 晶格对称性, 参数选取, 有限尺寸, 纠缠收敛, 试图消灭“翘起”的纠缠熵, 找到合适的系统和参数选取。

第一个内容, 晶格编号与晶格对称性。参数 $t = 0.03, \Delta = 0.018, V = 0.1, J = 1$.第一种, 原始晶格与顺序:

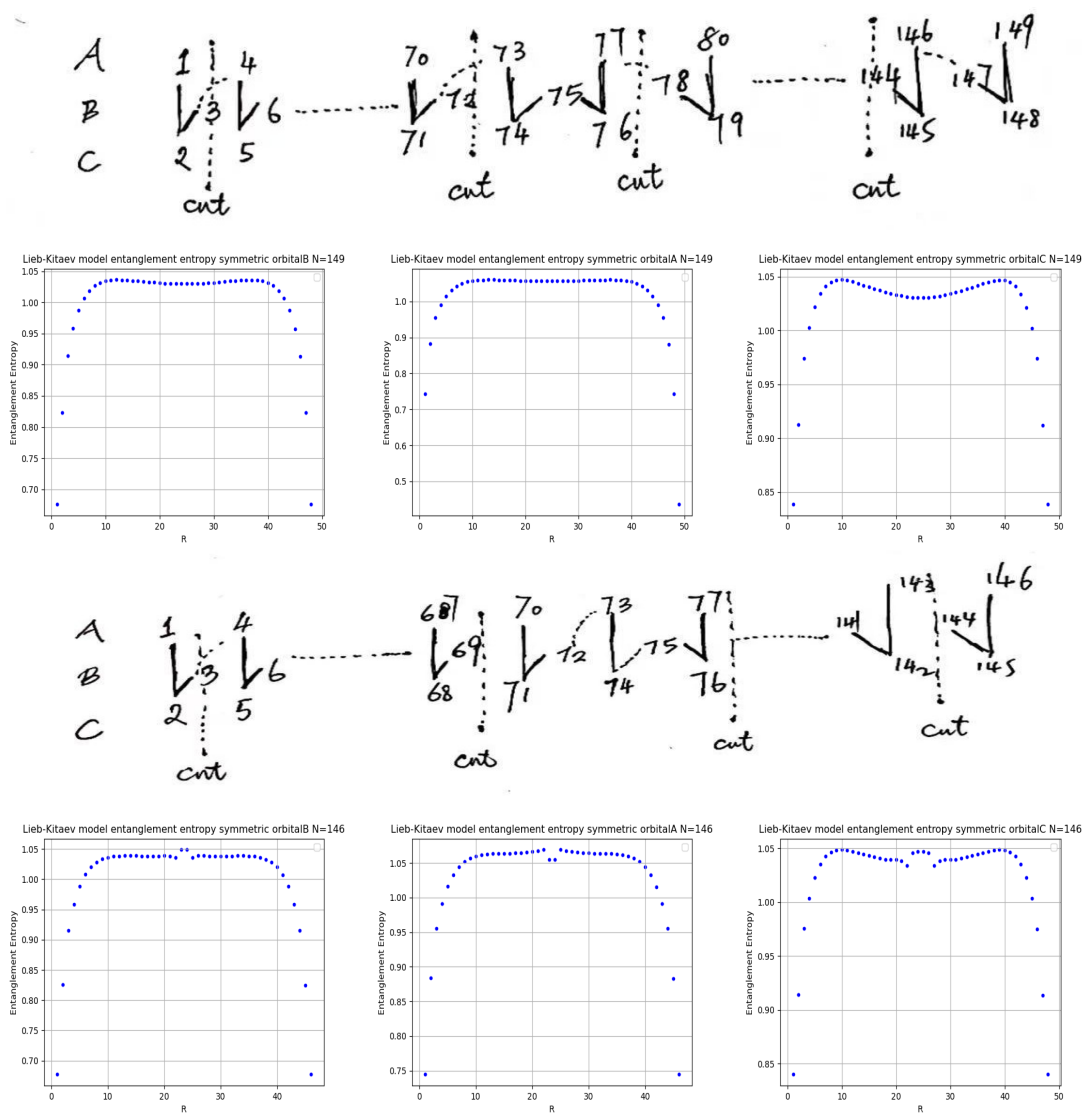


第二种, 原始晶格与扭转的顺序, 这个顺序让分成的子空间对称, 遗憾的是相互作用在这些子空间上并非对称。结果和上面一致, 也许是因为没有改变晶格结构, 也没有改变子空间位置, 马约拉纳波函数的斜率没有变化, 中间有一个

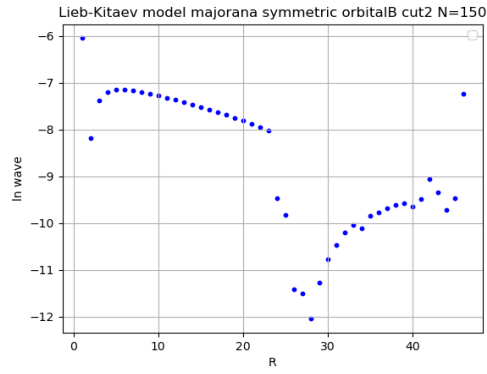
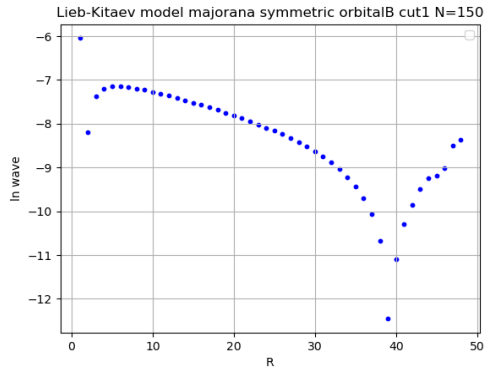
微小的“断点”：



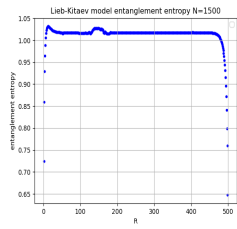
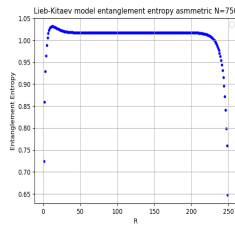
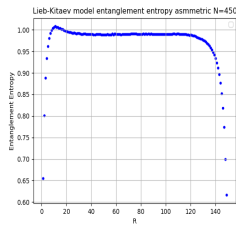
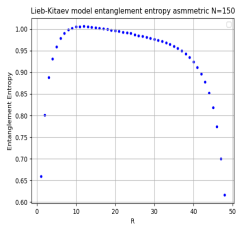
第三种，扣掉最右边一个格点的完全对称的晶格和完全对称的晶格编号，分为奇数和偶数链长可以看到纠缠熵确实对称了：



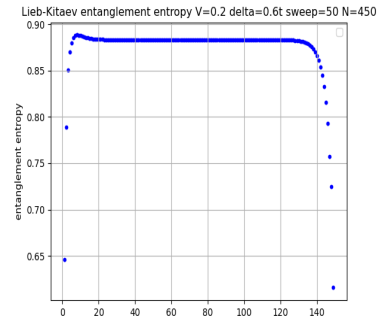
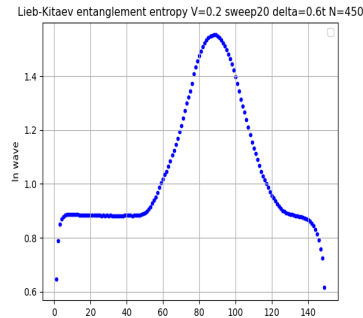
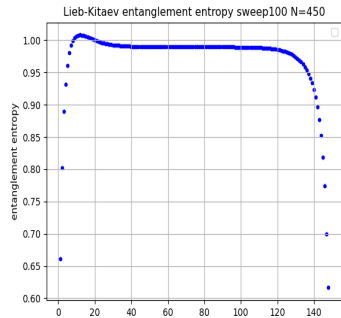
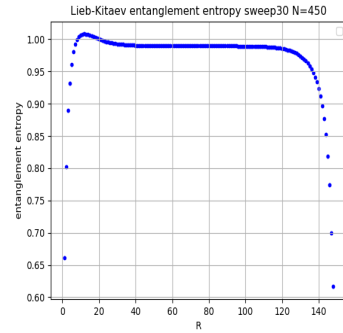
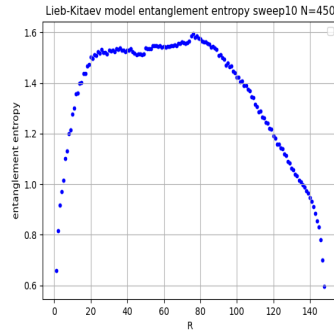
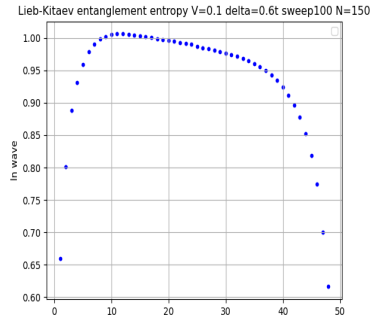
遗憾的是，在这种情况下晶格并不完整，马约拉纳波函数的性质不好：



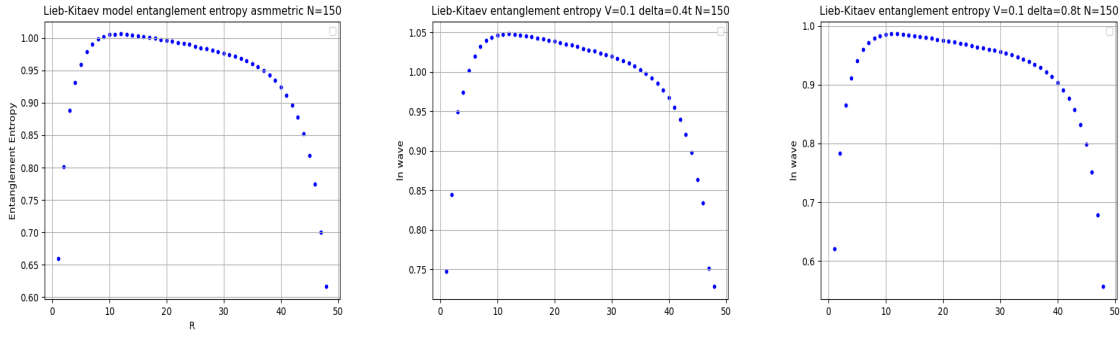
第二个内容，有限尺寸效应，与系统收敛性质。选取 $V = 0.1$ 系统对于不同尺寸分析在 $sweep20$ 的时候,可以看到有限尺寸对于 $N = 150$ 的作用，并且 N 很大的时候仍然“翘起”，似乎这样无法消灭不对称性：



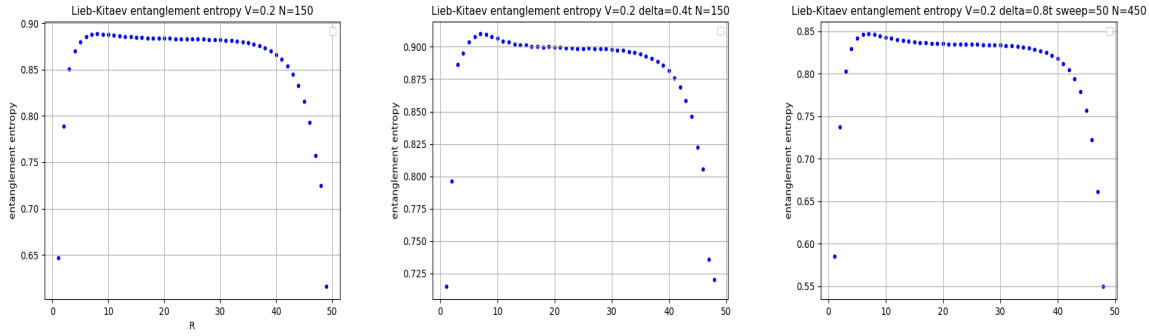
还可以观察到，越大的系统越难收敛，比如下面的图是 $N = 150$ 很大的 $sweep$ 情况，几乎没有差别，而 $N = 1500$ 中间的突出很可能是不收敛导致的，还可以分析 $N = 450$ 时候只用10个 $sweep$ 时不能收敛。对于参数 $V = 0.2$ 时也做了分析，这时候 $N = 450$ 时仅用20个 $sweep$ 无法收敛，而用50个 $sweep$ 收敛比较好了。这说明虽然此时马约拉纳波函数的性质没什么差别，但是纠缠熵有很大变化。但是收敛性解决的也不是“一端翘起”的问题：



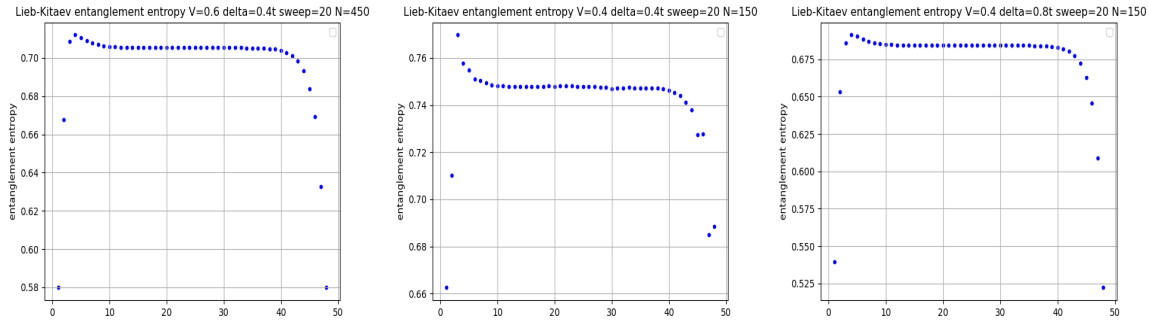
第三个内容，参数的选取。当 $V = 0.1$ 时，对于不同 t/Δ 比，有限尺寸效应比较严重：



当 $V = 0.2$ 时，翘起减弱了，对于不同的 t ，似乎 BCS 对形状影响不如 V 的大，只是对于平台的高度变化：



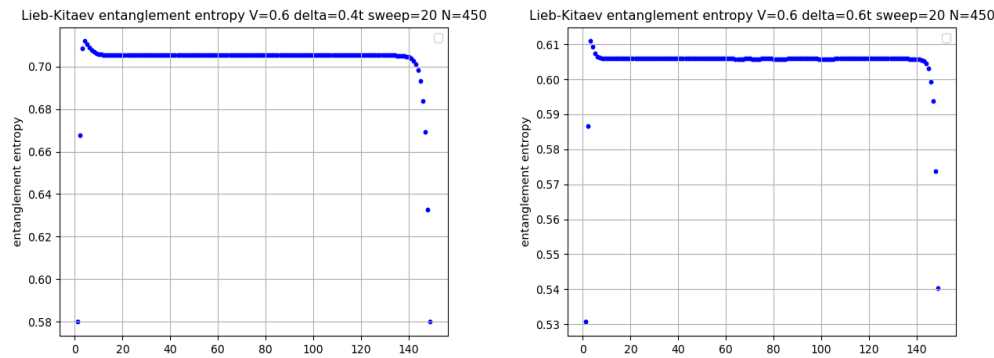
当 $V = 0.4$ 时，翘起很弱了，对于不同的 t ，似乎 BCS 对形状影响又强了一些，以及对于平台的高度变化：



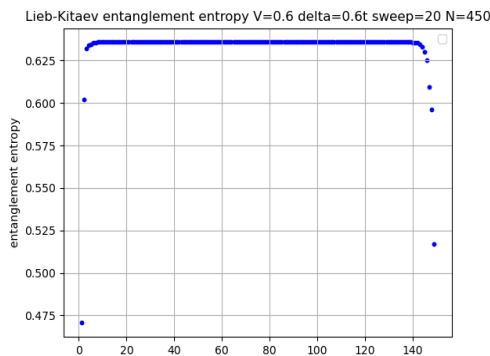
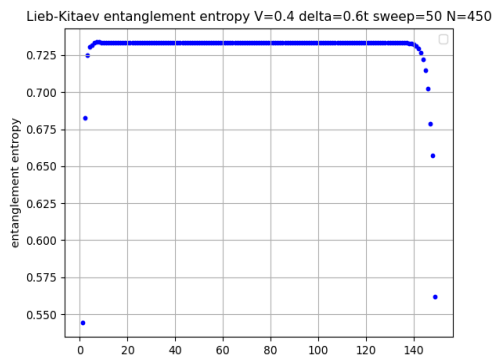
下面时目前我能得到的最好看的纠缠熵的参数选择，翘起还是无法避免。

左图的参数是：原格点， $V = 0.4, J = 1, t = 0.03, \Delta = 0.018, N = 450, Sweep = 50$ 。

右图的参数是：原格点， $V = 0.6, J = 1, t = 0.03, \Delta = 0.018, N = 450, Sweep = 50$ 。



现在看这个“翘起”并非完全不对称，而是左右在某个类似于 BCS 长度下面有一个翻折。更奇怪的是，下面两幅图是以 $orbitalA$ 作为子空间分界的图，似乎它的效果比 $orbitalC$ 分界要更好？



第四个内容，纠缠熵的一些其它性质。师兄组会上提议还原到kitaev模型看看是否对称。比如最左边是纯净的1-orbital kitaev 链 $t \neq \Delta$ 时，调整参数可以观察到当 $t = \Delta$ 时，纠缠熵平台为 $\ln 2$ ，符合kitaev chain理论的预言。（问题：老师我没有查到具体的推导： $\ln 2 + S_0$ ，如何计算这个值？）我只能给出一个形式上的推导：

当kitaev链参数 $t = \Delta$ 时BCS局域长度为零，系统马约拉纳费米子就位于左右两端。两个算符和哈密顿量对易 $[H, \gamma_1] = 0, [H, \gamma_N] = 0$ 因此 γ_1, γ_N 可以组成一个费米子算符 $f^\dagger$ 是系统的零能激发：

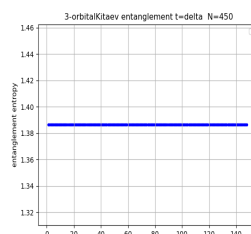
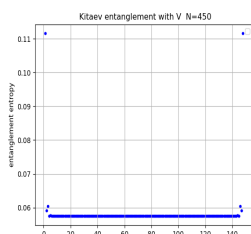
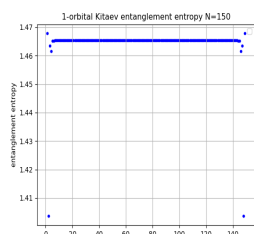
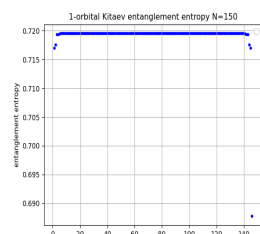
$$f = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma_1 + i\gamma_N)$$

对于基态basis $|0\rangle_1|0\rangle_N$ ，激发态为 $\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle_1|0\rangle_N + \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle_1|1\rangle_N$ ($i\gamma_N$ 为右激发， $|1\rangle$ 为激发一个majorana)。仔细观察这个态就如同两比特算符的最大纠缠熵，为 $\ln 2$ 。当kitaev链参数 $t \neq \Delta$ 时BCS局域长度非零此时两个majorana相互作用：

$$H = f + \epsilon \gamma_L \gamma_R$$

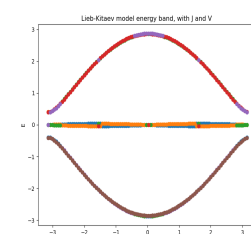
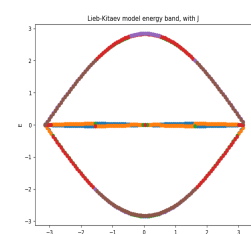
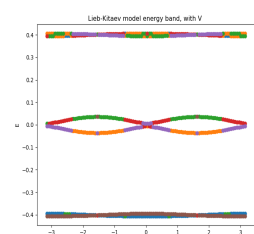
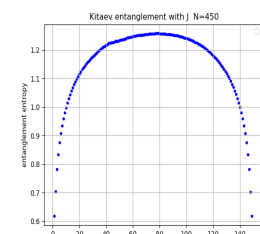
原本部分代表了边界的纠缠，后面相互作用一项代表了“两比特算符”之间的混合，代表了内部存在的短程纠缠。会增大纠缠，所以该平台上升。

第二张是3-orbital的kitaev 链，第三张在第二张基础上加了onsite V 。这三张如对于orbital B 划分的子空间，穿透子空间的相互作用形式完全对称，应当有对称的纠缠熵。

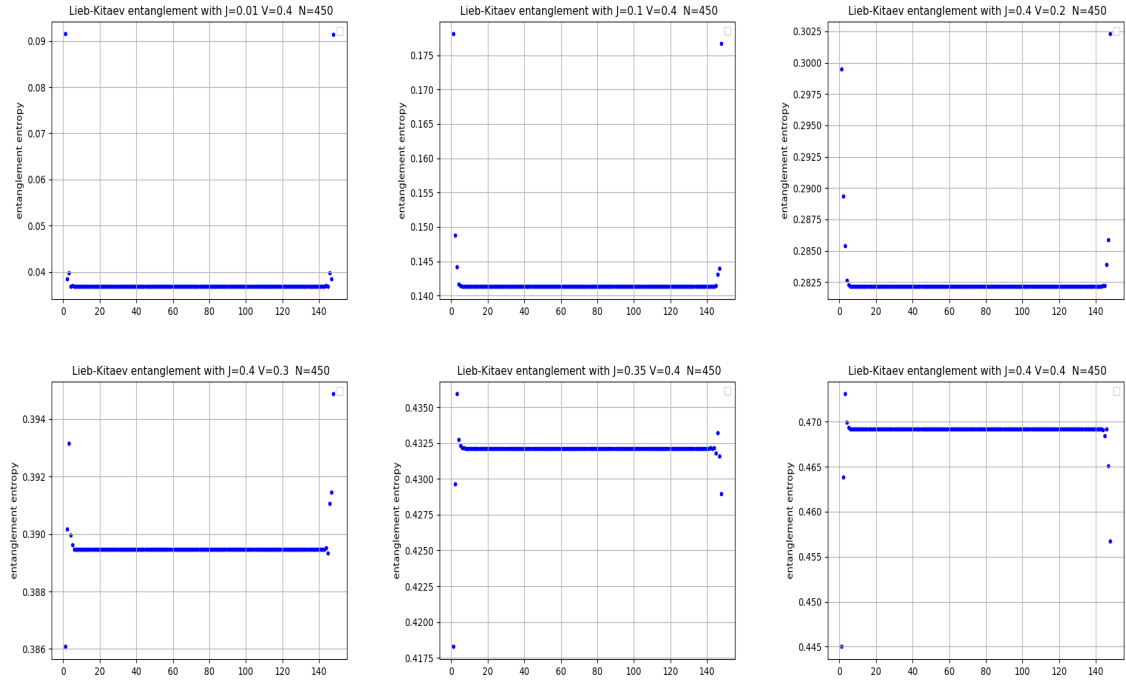


3-orbital的kitaev 链,调整参数可以观察到当 $t = \Delta$ 时，纠缠熵平台为 $2\ln 2$ 。三条单独的kitaev链似乎是 $3\ln 2$ 。进一步计算发现orbital为2, 3，对应 $2\ln 2$,orbital为4, 5对应 $3\ln 2$ 问题：我实在不理解这是为什么，看上去确实这种情况下存在对应的未配对的majorana数目。

下面的图在第二张基础上加了orbital之间的hopping J ，结果似乎也很对称，但是属于另外的结果，还画了对应的能带图反映gapped或是gapless的激发。我尝试解释一下：gapless系统纠缠熵满足CC公式,critical下面正比于central charge和 $\log L$ 这是标度律给出的。gapped系统一维体纠缠是固定的，二维满足面积率一维和系统尺寸无关，向内部迅速的饱和。在这个情况中，只要存在 V ，由于 $V \gg t$ 系统是gapped,有固定纠缠；否则如果只存在 J ，在布里渊区边界存在gapless激发，这张图取 $\log$ 确实看到线性的部分。一个关键是majorana也存在着零能的激发，甚至只要particle-hole对称性带来的上支触及零，下支也必然触及零。这是否满足gapless的定义？（我知道拓扑相也是gapless但是定义究竟是什么）



现在选取这样一组参数， $V = 0.4$ ，不同的 J 从零变化到 $J = V$ 。这些参数全部属于拓扑相。随着 J 变大，观察到纠缠平台上升，不对称也产生了，原因就是 J 穿透每一个子系统边界的 J 对于左右并不是对称的，即使用扭曲顺序也不是对称的，只有扣掉最右边一个才是对称的。



这一组参数， $J = 0$ ， V 的变化，从原本的kitaev纠缠，到 V 较大时纠缠平台为零。

