

DATE

Bruus. Chap 14 Interacting Electron Gas.

We know the GS energy of Jellium model using 2nd perturbation theory. This chapter will derive the GS energy again via Green's Function.

Yukawa-potential, for small $\alpha \rightarrow 0$

$$W(r-r') = \frac{e_0^2}{|r-r'|} e^{-\alpha|r-r'|}$$

$$W_q = \frac{4\pi e_0^2}{q^2 + \alpha^2}$$

to ensure finite integrals $W_q \neq \infty$ for a substitution of pure long-range coulomb potential.

However, when $\alpha \rightarrow 0$, 2nd perturbation also gives:

$$E^{(2)} = \int dq \cdot q^2 \cdot \frac{1}{(q^2 + \alpha^2)^2} \cdot \frac{1}{(k_1 + q)^2 - (k_2 + q)^2} \cdot \sum_{\mathbf{k}_1} \alpha(|\mathbf{k}_1 + \mathbf{q}| - |\mathbf{k}_1|)$$

积分系数: U^2 ; $\Delta E \propto \frac{1}{q}$; $\langle GS | V_2 | \text{pertu} \rangle \propto q$

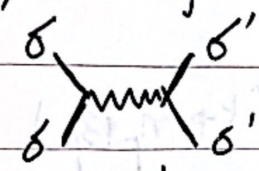
$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \propto \ln \alpha \rightarrow \infty$$

Later Green's Function shows Yukawa potential α can become independent after a renormalization of pure Coulomb potential which $\alpha \rightarrow 0$ makes NO INFINITY.

$$H = H_0 + V \leadsto G \leadsto \sum_{\delta} (k, i k n) \text{ Mastbana}$$

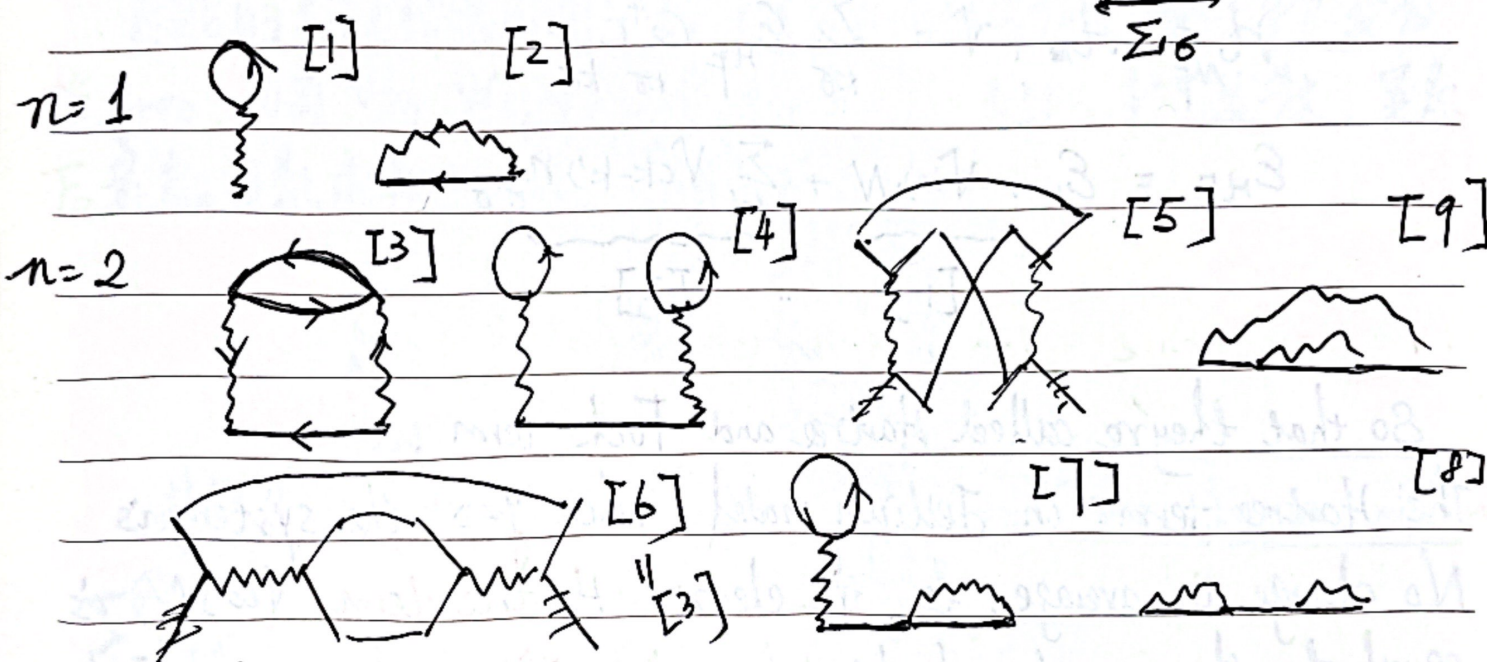
We write out the self-energy of this V interaction.

$$H(V) : \sum_{i,j} W(n_i n_j) \text{ No spin freedom.}$$

in k -space: 

in Hubbard Model $\delta = -\delta'$. Now δ can be equal to δ'

So we shall consider more graphs $\sum_{\delta} \delta \leftrightarrow \delta'$

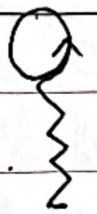


Among these graphs. [1], is Hartree self-energy. Also there are diagrams that can be cut into two pieces by cutting a single fermion line. [4][7][8] which $[4] = G[L]^2$; $[7] = G[L][L^2]$

$$\Sigma = [1] + G[L]G + G[L^2]G + G[L][L^2]G + \text{[other terms]}$$

All contributes to the $\Sigma^{(1)}$ term. We shall not include [4][7][8], others are called the irreducible graphs.

[Different Connected Irreducible] Graphs.

[1]  is the Hartree term. $n_F(\frac{1}{2}p)$

$$\Rightarrow \sum_{\text{Hartree}} (k, i|kn) = \int dp n_F(\frac{1}{2}p) = \frac{N}{V}$$

[2]  is the Fock term.

$$\sum_{\text{Fock}} (k, i|kn) = - \int dp W(k-p) n_F(\frac{1}{2}p)$$

in Hartree-Fock MF approximation

$$H_{MF} = H_0 + V = \sum_{k\sigma} E_{MF} C_{k\sigma}^\dagger C_{k\sigma}$$

$$E_{MF} = E_k + \underbrace{V(0) \cdot N}_{[1]} + \sum_{k'} \underbrace{V(k-k') n_{k'\sigma}}_{[2]}$$

So that they're called Hartree and Fock term.

The Hartree term in Jellium model. when $g \rightarrow 0$, the system is No charge in average, i.e. the electron Hartree term $V(0)N$ is equal to the positive background $-V(0)N$, which cancels [1].

Q: In high density limit, which diagram among these remaining graphs are most important?

$$\sum^{(n)} = \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} W^{(n)} G^{(2n+1)}$$

We just assume k , All Near Fermi Energy k_F .

$$W_q^{(n)} \propto k_F^{-2n}$$

$$G^{2n+1} \propto \left(\frac{1}{ik - \epsilon_{k_F}} \right)^{2n+1} = k^{-2(2n+1)}$$

$$k_F^{-2n-2(2n+1)} = k_F^{-4n+2}$$

$$\text{和分: } (k_f)^{5\pi} \times (k_f)^{-4n+2} = (k_f)^{n+2}$$

$\Sigma^{(n+1)}$ 相较 $\Sigma^{(n)}$ 多 k_f 量级, 从公式:

$$r_s = \left(\frac{9\pi}{4}\right)^{1/3} \frac{1}{a_0 k_f} \quad r_s: \text{电子气电子平均间隔}$$

$$k_f \ll 1 \Rightarrow \Sigma^{(n+1)} \ll \Sigma^{(n)}$$

这说明. 计算一阶二阶自能足矣.

自能的发散情况如何? 比如 $n=2$ 有 $W(q)W(q)$ 项. 会以 q^{-4} 发散. 当 $q \rightarrow 0$; 另有 $W(q)W(q-p)$ 项在 $q \rightarrow 0$ 且 $p \rightarrow 0$ 处以 q^{-4} 发散. 显然后者能留数求和点远小于前者, 即:

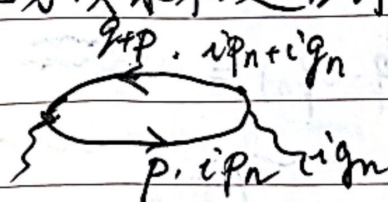
$$\begin{array}{ccc} \text{Diagram 1} & \gg & \text{Diagram 2} \\ W(q)W(q) & & W(q)W(q-p) \end{array}$$

考虑发散奇点最多的图, 为一个 Random Phase Approximation

$$\sum_{\mathbf{k}}^{\text{RPA}} \chi(\mathbf{k}) \approx \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \dots$$

其中前几项最重要, 但是无穷项求和是否有通项?

Calculate: $\chi(q, i\omega_n)$



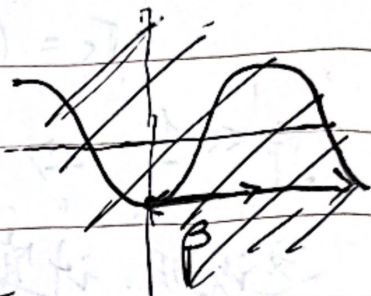
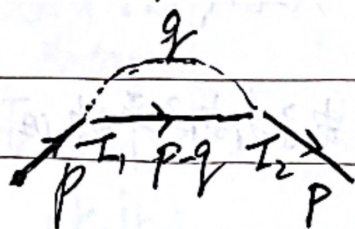
$$= \sum_{P_n} G_c^{(u)}(p, i\omega_n+i\omega_q) G_c^{(u)}(p, i\omega_n)$$

P_n : Fermion Summation.

$$= \sum_{P_n} \frac{1}{i\omega_n+i\omega_q-\epsilon_{p+q}} \cdot \frac{1}{i\omega_n-\epsilon_p} \cdot \frac{2}{\beta}$$

integral $\Rightarrow \chi_0(q, i\omega_n) = \frac{2}{\beta} \sum_{P_n} \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{i\omega_n+i\omega_q-\epsilon_{p+q}} \cdot \frac{1}{i\omega_n-\epsilon_p}$

求和, (q, iq_n) 为玻色求和. 关键是 $g(q, \tau) = \pm g(q, \tau + \beta)$
若取负为费米求和, 取正为玻色求和. 此列中.



此线可倒置. 即 $g(q) = g(-q)$. 偶函数.
对应 $\langle C_q(\tau) C_q^\dagger(\tau') \rangle \approx \langle C_q \rangle$ 关键是
 q 是如何分布的? 是 $L=0$ 比如. 同费米不相容吗? 否.
 $q = p_1 - p_2$ 大量 p . 同个 q 上分布可大量简并. $p_1: n_F; p_2: n_F$
 $p_1 - p_2: n_B \Rightarrow q: \text{Boson}.$

$$\text{Using: } n_F(\sum_{k+q} iq_n) = \frac{1}{e^{\beta \sum_{k+q} + 1}} = n_F(\sum_{k+q})$$

$q_n: \text{Boson}.$

此求和得到:

$$\chi_0(q, iq_n) = 2 \int \frac{d\phi}{(2\pi)^3} \frac{n_F(\sum_p) - n_F(\sum_{p+q})}{iq_n + \sum_p - \sum_{p+q}}.$$

另外: 令 $W^{RPA}(q, iq_n) =$

$$= \text{wavy line} + \text{wavy line} \circ \text{wavy line} + \text{wavy line} \circ \text{wavy line} \circ \text{wavy line} + \dots$$

$$= \text{wavy line} + \text{wavy line} \circ \text{wavy line}$$

$$\Rightarrow W^{RPA}(q, iq_n) = \frac{\text{wavy line}}{1 - \text{wavy line} \circ \text{wavy line}}$$

$$= \frac{-W(q)}{1 - W(q)X_0(q, iq_n)} \quad X_0 \text{ 已得到} \quad W_q = \frac{4\pi e^2}{q^2 + a^2}$$

when $a \rightarrow 0$

$$W^{RPA}(q, iq_n) = \frac{4\pi e^2}{q^2 - 4\pi e^2 X_0(q, iq_n)}$$

观察 $W^{RPA}(q, iq_n)$ 与 W_q 区别. 相互作用电子气 $v \sim u$ 作用物理皆包括在 $X_0(q, iq_n)$ 中了, $a \rightarrow 0$ 无影响. 当 $q \rightarrow 0$ 时, 且 $iq_n = 0 + i\eta$, W^{RPA} 类似 Yukawa 势能, $W^{RPA}(q, 0) = \frac{4\pi e^2}{(q^2 + k_s^2)}$. 称 k_s 为 Thomas-Fermi 屏蔽波数 $k_s^2 = -4\pi e^2 X_0(0, 0)$

代入 $X_0(q, iq_n)$ 形式得到 $X_0(q, 0) \xrightarrow{q \rightarrow 0}$

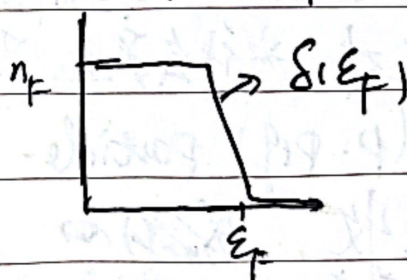
$$= 2 \int \frac{dp}{(2\pi)^3} \frac{(3p_F - 3p)}{3p_F - 3p} \frac{\partial n_F}{\partial p} \approx - \frac{d}{dp} \left(\frac{1}{2} \right) \Big|_{p=p_F}$$

$$\text{即 } W^{RPA}(q \rightarrow 0, 0) = \frac{1}{\epsilon_F} \frac{d}{d\epsilon_F} \quad k_s^2 = \frac{4}{\pi} \frac{k_F}{a_0}$$

$$= \int dp \cdot \frac{d^3 p}{d^3 p} \cdot \frac{\partial n_F}{\partial 3p} = \int d^3 p \left(\frac{\partial n_F}{\partial 3p} \right) \cdot \frac{dp}{d^3 p} \quad \text{when } k_B T \ll \epsilon_F$$

$$= \left(\frac{dp}{d^3 p} \right) \Big|_{\epsilon = \epsilon_F}$$

态密度 即费米面态密度.



从图看出, 这就是 $W(q)$: $\sim$ 被 $(v \sim u)$ 作用 ψ "重整化" 的结果: $\frac{1}{q^2} \sim \frac{1}{q^2 + X_0}$, 自能, 即 (onsite $u + v$) 共同作用下的等效每个电子感受到的 "势能".

一般情况下, 积出 dp . 定义 $\lambda = \cos \theta$ $x = \frac{q}{2k_F}$ $x_0 = \frac{\omega}{4\varepsilon_F}$

$$\int \frac{dp}{(2\pi)^3} = \int_{R^+} \frac{dp}{4\pi^2} p^2 \int_{-1}^1 d\lambda$$

$$\xi_{pq} - \xi_p = \frac{1}{2m} (q^2 - 2pq\lambda)$$

$$\Rightarrow I_m \chi_0(q, \omega + i\eta) = \int_0^{k_F} \frac{dp}{2\pi} p^2 \int_{-1}^1 d\lambda [\eta_F(\xi_{pq}) - \eta_F(\xi_p)] \delta(\xi_{pq} - \xi_p - \omega)$$

$$I_m \chi_0^R(q, \omega) = -d(\varepsilon_F) \times \begin{cases} \frac{\pi}{8x} [1 - (\frac{x_0}{x} - x)^2] & |x - x^2| < x_0 < x + x^2 \\ \frac{\pi}{2} \frac{x_0}{x} & 0 < x_0 < x - x^2 \\ 0 & \text{other } x_0 \geq 0 \end{cases}$$

我们看到之前 $q \rightarrow 0$ 即阴阳势抵消情况, 而 $q \neq 0$ 体系则产生极化, 而 χ_0 即描述极化强度, 关注 $\chi_0 = \int \langle C_{pq}^\dagger(z) C_{pq}(0) \rangle x$
 $\langle C_p(z) C_p^\dagger(0) \rangle$ 描述在 $t=0$ 产生 p 电子与 $p+q$ 空穴, 电子-空穴对, 在 t 时刻湮灭此对。中间 $0 \sim t$ 中电子 p 与空穴 $p+q$ ($q \neq 0$) 时对应了体系的极化, 而 $I_m \chi_0$ 虚部描述耗散, 即 0 时刻在产生的电子空穴对, 为什么会产生, 即 $t=0$ 时刻提供了能量, 比如光子 q , 激发 $(p, p+q)$ particle-hole 对, 这份能量在 $0 \sim t$ 中逐渐被电子气吸收, $\chi_0(z) \rightarrow$ 产生了 $\delta(\xi_{pq} - \xi_p - \omega)$ 几个吸收峰, 以及吸收速度(峰的展宽, ie: $I_m \chi_0$, ie: 能量耗散的速度)。($I_m \chi_0$ 描述峰展宽; $Re \chi_0$ 描述峰位置)

Calculate Ground State Energy, perturbation theory.

$$H_\lambda = H_0 - \mu N + \lambda W$$

$$\Omega(\lambda) = -\frac{1}{\beta} \ln \text{Tr} [e^{-\beta(H_0 - \mu N + \lambda W)}] \quad \text{Tr over interaction basis } |\lambda\rangle$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \Omega(\lambda)}{\partial \lambda} = -\frac{1}{\beta} \frac{\text{Tr} [-\beta W e^{-\beta(H_0 - \mu N + \lambda W)}]}{\text{Tr} [e^{-\beta(H_0 - \mu N + \lambda W)}]} = \langle W \rangle_\lambda$$

$$\Rightarrow \Omega(1) - \Omega(0) = \int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda} \langle \lambda W \rangle_\lambda$$

$\Omega(\lambda)$ 实际上就是亥姆霍兹自由能 $F = U - TS - \mu N = T \ln Z$

当 $T \rightarrow 0$ $F = U - \mu N$ 全是基态, 内能即基态能量 $\Omega(\lambda=0)$ 即 H_0 基态能量 E_0 . $\Omega(\lambda=1)$ 即 H 基态能量所求值. $dS = \frac{1}{T} (dU - \mu dN)$

$$F = U - TS = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} - T K (\ln Z - \beta \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}) = -K (\ln Z - \beta \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta})$$

$= -KT \ln Z$ 比算 U 简单, 不用 $(\partial \beta)$.

$$\Rightarrow E = E_0 + \int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda} \langle \lambda W \rangle_\lambda \quad \text{其中 } \langle \lambda W \rangle_\lambda = -\frac{1}{\beta} \frac{\text{Tr} [e^{-\beta W} e^{-\beta H}]}{\text{Tr} [e^{-\beta H}]}$$

Calculate $\langle \lambda W \rangle_\lambda$ 已知:

① 海森堡方程: $H = \sum_{\mathbf{r}} \epsilon_{\mathbf{r}} a_{\mathbf{r}}^\dagger a_{\mathbf{r}} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{q}} V_{\mathbf{q}} a_{\mathbf{r}+\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{r}}^\dagger a_{\mathbf{r}} a_{\mathbf{r}'}.$

$$\dot{a}_{\mathbf{r}}(t) = i[H, a_{\mathbf{r}}(t)]$$

$$= -i \epsilon_{\mathbf{r}} a_{\mathbf{r}}(t) + \frac{i}{2} \sum_{\mathbf{r}', \mathbf{q}} V_{\mathbf{q}} [a_{\mathbf{r}+\mathbf{q}}^\dagger(t) a_{\mathbf{r}}^\dagger(t), a_{\mathbf{r}}(t)] a_{\mathbf{r}'}(t) a_{\mathbf{r}'}(t).$$

② $-\partial_{\mathbf{r}} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} + \langle T_{\mathbf{r}} [H, G] C(\mathbf{r}) C_{\mathbf{r}'}^\dagger(\mathbf{r}') \rangle$
equations of motion.

$$\Rightarrow -\partial_{\mathbf{r}} G_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}'}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}) + \langle T_{\mathbf{r}} [H_\lambda, C_{\mathbf{k}\mathbf{r}}] C(\mathbf{r}) \times C_{\mathbf{k}\mathbf{r}'}^\dagger \rangle_\lambda$$

$$- \partial_z g_0^\lambda(k, z) = \delta(z) + \sum_k g_0^\lambda(k, z) - 2 \sum_{k'q} \frac{\lambda}{2} W(q) \times \\ \langle T_z C_{k'q}(z) C_{kq_0}(z) C_{kq_0}(z) C_{kq}^\dagger \rangle \cdot \lambda$$

令 $z \rightarrow 0 = -\eta$ 后面一项就是 $\langle \lambda W \rangle_\lambda$

$$\text{而 } \partial_z g_0^\lambda(k, z) = \partial_z \frac{1}{\beta} \sum_{ik_n} g_0^\lambda(k, ik_n) e^{ik_n z} = \frac{1}{\beta} \sum_{ik_n} (ik_n) g_0^\lambda(k, ik_n) \times e^{ik_n z}.$$

$$\text{并且 } \delta(z) = \frac{1}{\beta} \sum_{ik_n} e^{ik_n z}$$

$$\text{原式即: } \frac{1}{\beta} \sum_{ik_n} (ik_n - \sum_k) g_0^\lambda(k, ik_n) e^{ik_n z} = \frac{1}{\beta V} \sum_{ik_n} e^{ik_n z} + 2 \langle \lambda W \rangle_\lambda$$

$$\text{利用: } (ik_n - \sum_k) g_0^\lambda(k, ik_n) - 1$$

$$= (ik_n - \sum_k) g_0^\lambda(k, ik_n) - (g_0^\lambda(k, ik_n))^{-1} (g_0^\lambda(k, ik_n))$$

$$\text{其中: } [g_0^\lambda(k, ik_n)]^{-1} ik_n - \sum_k = \sum_k^\lambda(k, ik_n)$$

$$\text{即: } \sum_k^\lambda(k, ik_n) g_0^\lambda(k, ik_n)$$

$$\Rightarrow \langle \lambda W \rangle_\lambda = \frac{1}{2\beta V} \sum_{ik_n} \sum_k g_0^\lambda(k, ik_n) \sum_k^\lambda(k, ik_n) e^{ik_n z}$$

其中: RPA 方法计算过自能, 做 $n=2$ 近似

$$\sum_k^\lambda = W^{\text{RPA}} + \text{1阶余下自能, 2阶余下自能} \\ [2] + [5] + [9]$$

$$g_0^\lambda \approx \overleftarrow{g_0} + \overleftarrow{g_0^2} \cdot \sum_k^\lambda$$

方法: 计算 frequency summation, 得到 $\langle \lambda W \rangle_\lambda$, 而

$$E = E_0 + \lim_{T \rightarrow 0} \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} d\lambda \langle \lambda W \rangle_\lambda$$

最终得到了基态能量 $\log(k_F)$ 正比. $k_F = \text{Thomas-Fermi 尺度}$.

Electronic properties of interacting electron gas.

Coulomb potential, as discussed above, will be screened. Also the ϕ_{ext} external potential will be screened similarly. That is, electrons may not feel ϕ_{ext} directly.

关键的物理量有(电导 σ , 极化率 χ) 外场 ϕ_{ext} , 诱导电荷密度 ρ_{ind} , 回顾之前做法, 涨落-耗散定理描述的就是:

$$\text{Im} G^R(\gamma, \omega) = -f(\omega)(1-i) G^I(\gamma, \omega).$$

or: 经典角度, $\epsilon(q) = 1 - (4\pi/q^2) \frac{\rho_{ind}(q)}{\phi_{tot}(q)}$.

or: 电子动, 离子不动 $\epsilon(q, \omega) = 1 + i \frac{4\pi \bar{\sigma}(q, \omega)}{\omega}$

因为:

$$\epsilon \cdot \phi_{tot} = \phi_{ext}, \quad \phi_{tot} = \phi_{ext} + \phi_{ind}, \quad \phi_{ind} = \int \rho_{ind}(r) V(r)$$

电导性质因此可由外场 ϕ_{ext} 引导出 ρ_{ind} 产生 $\sigma(q, \omega)$ or $\epsilon(q)$ 改变来判定, 或者之前 Lindhard formula 用线性响应给出电导 or ϕ_{ind}/ϕ_{tot} 一般之形式.

$$\epsilon(q, \omega) = 1 - \frac{4\pi}{q^2} \cdot 2e^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{f_{k-q/2}^* - f_{k+q/2}^*}{3\omega/2 - 3k+q/2 + \omega + i0^+}$$

总之这是基于 Linear Response, ~~更高阶怎么办~~? 至少我们

知道: $\phi_{ind}(q, \omega) = \frac{1}{e^2} W(q) [-e \rho_{ind}(q, \omega)]$

Kubo formula 能够给出:

$$-e \rho_{ind}(q, \omega) = (-e^2) C_{ep}^R(q, -q, \omega) \phi_{ext}(q, \omega).$$

回顾: $J = \sigma E \leadsto \rho = \chi E$

σ : C_{ep} 流-流 $\Rightarrow$ 电荷-电荷关联函数

$$\phi_{\text{ext}} \rightarrow \text{line} \rightarrow \phi_{\text{ind}}$$

$$\text{line} / \phi_{\text{tot}} = \epsilon$$

C 描述就是响应. $E_{\text{ext}} \cdot C = J_{\text{ind}}$ $\phi_{\text{ext}} \cdot C = \phi_{\text{ind}}$

□!□ 给出:

$$\phi_{\text{ind}} = W(q) \cdot X(q, \omega) \cdot \phi_{\text{ext}}(q, \omega)$$

$$X(q, t-t') = C_{pp}^R(q, t, t') = -i\theta(t-t') \frac{1}{V} \langle [p(q, t), p(-q, t')] \rangle_{\hat{H}}$$

$\hat{H}$: $H_0 + W$ 但忽略 $H' = \int dr [-e\rho(r)] \phi_{\text{ext}}(r, t)$ 作用
无外场作用之 Basis

因此得到: , 因为 $\phi_{\text{tot}} = \epsilon \phi_{\text{ext}}$

$$\phi_{\text{tot}} = [1 + W(q) X(q, \omega)] \phi_{\text{ext}}(q, \omega)$$

$$\epsilon(q, \omega) = \frac{1}{1 + W(q) X(q, \omega)}$$

这就是我们要解的电学性质.

计算: $X(q, \tau) = -\frac{1}{V} \langle T_{\tau} p(q, \tau) p(-q, 0) \rangle_{\hat{H}}$

$$= \frac{1}{V} \left[-\langle p_{q=0} \rangle_{\hat{H}} \langle p_{q=0} \rangle_{\hat{H}} + \sum_{\substack{q \neq 0 \\ p, k, \sigma, \sigma'}} \langle T_{\tau} C_{p, q, \sigma}^{C(\tau)} C_{k, \sigma} C_{p, \sigma}^{+C(\tau)} C_{k+q, \sigma'}^{+} \rangle_{\hat{H}} \right]$$

Connected Graphs.

电中性: $\langle p_{q=0} \rangle_{\hat{H}} = 0$ (Jellium $q=0$)

$$X(q, \tau) \sim \langle T_{\tau} C_{p, 0, \sigma}^{+C(\tau)} C_{p, q, \sigma'}^{C(\tau)} C_{k, \sigma} C_{k+q, \sigma'}^{+} \rangle_{\hat{H}}$$

画图:

outside $G^{\infty}(k)$ $\delta = \delta'$ 可以.
 $\begin{matrix} + \\ \cdot p \end{matrix} \quad \begin{matrix} + \\ \cdot k \end{matrix}$
 $\begin{matrix} \cdot \\ k' \end{matrix} \quad \begin{matrix} + \\ \cdot p+q \end{matrix} \quad \begin{matrix} + \\ \cdot k+q \end{matrix} \quad \begin{matrix} \cdot \\ k' \end{matrix}$

双粒子 Green's Function:

$$\langle \rangle_{\hat{H}} \xRightarrow{\text{Basis}} | \rangle_{\hat{H}} = | \text{particle 1, particle 2} \rangle_{\hat{H}}$$

1 阶

$$\frac{C_p^+ C_{p+q} C_k C_{k+q}^+}{1 \quad 2}$$

2 阶

$$\hat{1} V \hat{2}$$

3 阶

$$\hat{1} V(t_1) V(t_2) \hat{2}$$

1 阶:

这就是 q 代替 Boson 类型图. 会回来. 不像单粒子单箭头 $\leftarrow \cdots \leftarrow$

2 阶

$$\text{Not irreducible} = [V^0]^2 W_q$$

DATE _____
定义 X^{irr} 为所有 irreducible graphs.

则有 $X = \langle \boxed{\Gamma} \rangle$

亦有: $X = X^{irr} + X^{irr} \text{ (为两图)} X^{irr} + X^{irr} X^{irr} X^{irr}$

irreducible: 一刀切! 不用 X^{irr} 和所有切的一刀组成

$$\Rightarrow -X(\hat{q}) = \frac{-X^{irr}(\hat{q})}{1 - W(\hat{q}) X^{irr}(\hat{q})}$$

ϵ - X 关系(上页)

$$\Rightarrow \epsilon(q, iq_n) = 1 - \frac{e^2}{\epsilon_0 q^2} X^{irr}(q, iq_n) \quad \text{"N"}$$

高密度电子密度分布无章, 系统平均为 0. ρ 起伏二阶项忽略, 可用 RP.

在上文利用了 RPA 方法, RPA 中, 只考虑 V^0 阶的 $\leftrightarrow$

$V^{(1)}$ 阶 $\bigcirc \text{---} \bigcirc = [V^0]^2$ 重复, 而 $\square, \square$ 图据之前的讨论又远小于 $\bigcirc \text{---} \bigcirc$, 故皆不计. $\leftrightarrow = X_0(q, iq_n)$ 已求得.

$$\epsilon^{RPA}(q, iq_n) = 1 - \frac{e^2}{\epsilon_0 q^2} X_0(q, iq_n).$$

$$\phi_{tot}^{RPA}(q, iq_n) = \frac{\phi_{ext}(q, iq_n)}{1 - (e^2/\epsilon_0 q^2) X_0(q, iq_n)}$$

总共 ϕ_{tot} 两部分. 一部分 ϕ_{ext} 作用 screen, 一部分内部电子间自行 screen:

$W_{RPA}^{(int)}(q, iq_n) = \text{---} \text{---} \text{---} = \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} \text{---} + \dots$

$U_{RPA}^{(ext)}(q) = \bullet \text{---} \star = \bullet \text{---} \star = \bullet \text{---} \bigcirc \text{---} \star + \dots$
↓
impurity outside.

计算: Calculate out $\epsilon^{RPA}(q, \omega)$.

where $k_B T \ll E_F$; $q \ll k_F$; $V_F q \ll \omega$. 算出 X_0 , Fermi 球

$$\epsilon^{RPA}(q, \omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left[1 + \frac{3}{5} \left(\frac{q V_F}{\omega} \right)^2 \right]$$

where $V_F = k_F/m$; $3\pi^2 n = k_F^3$ $\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\epsilon_0}}$

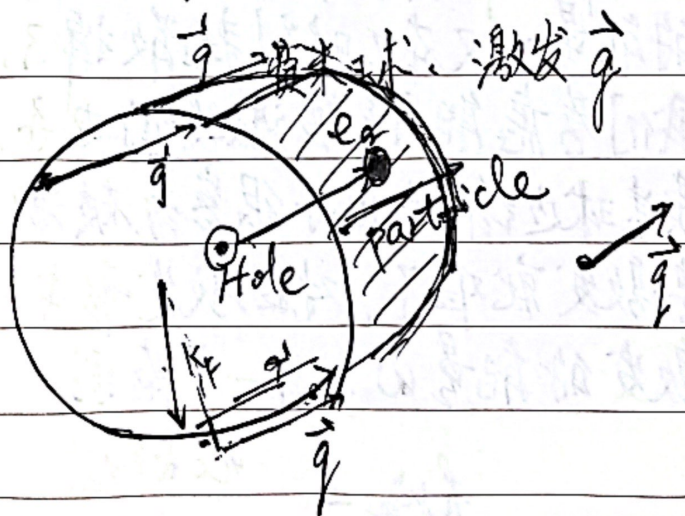
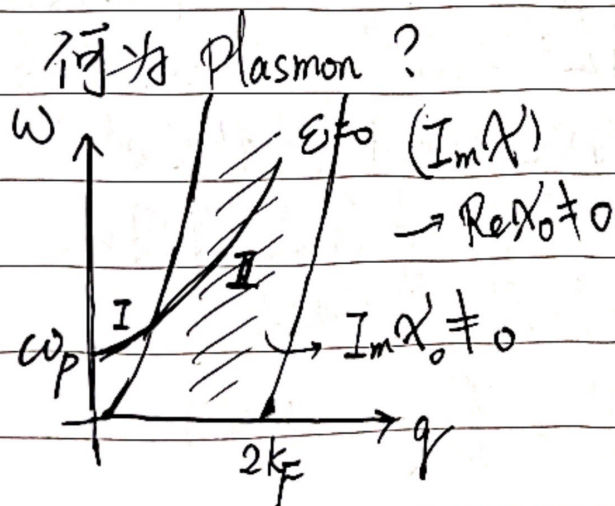
$\epsilon^{RPA}(q, \omega)$: ω : 外场振动频率. 实际上 $\omega > \omega_p$, ω_p 称等离子体频率, 大于之金属变得透明, $\omega \approx 10^{16}$ Hz, 紫外谱线.

ω 大, 外场如实际振动; q 小, 长波, 整体受到 $+A$ 与 $-A$ 的外场. 局域不见外场差异; T 小, 仅等离激发.

Plasma oscillation: when $\epsilon(q, \omega) = 0$.

$$\omega(q) \approx \omega_p + \frac{3}{10} \frac{V_F^2}{\omega_p} q^2 \quad (\text{Im} \epsilon = 0)$$

when ω 很大, ϵ 中 $\text{Im} X = 0$. 无耗散为一种集体振荡. $\epsilon = 0$. 透明 ($\omega(q) > \omega_p$) 时即如此会发生. 此时.

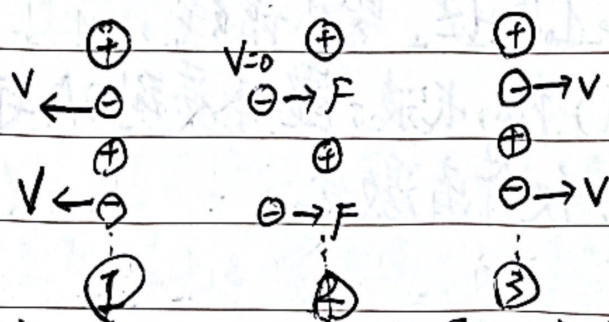


物理: 相互作用电子气是如何激发的?

A: 等离激发, I 区中有集体振荡.

相互作用电子气由电子e-e. 电子-离子相互作用以及阳势组成。在电子-离子相互作用中, 离子看作外场 ϕ_{ext} 激发电子, $\phi_{ext} = \epsilon$ 电子-离子相互作用结果是即使离子均匀分布 $\phi_{ext} = 0$, 如果 $\epsilon = 0$ ϕ_{tot} 还能存在 $\neq 0$, 说明电子能够通过虚作用自发地激发 (比如涨落), 产生一个本征的激发模式。上文已经求解出了 $\epsilon(q, \omega) = 0$ 的解, $\omega = \omega_p + Aq^2$ 为此模式的色散关系。

经典来看, 此激发如图。

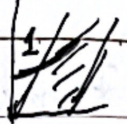


就是受到扰动的电子有了能量 V , 在离子周围能够做简谐运动的过程, 有特征频率 ω_p 。

从费米球上看, 激发虚过程产生电子-空穴对, 通过给出激发 $\vec{q}$, 使系统产生粒子-空穴对的极化 $\chi_0 = \langle C_{p+q}^\dagger(\vec{r}) C_{p+q}(0) \rangle \times \langle C_p(\vec{r}) C_p^\dagger(0) \rangle$ 并在 t 时刻消失 (上图 1~3 过程) χ_0 涨落带来的能量 V 又在 t 时刻耗散掉了, 重新被电子气 (电抗) 所吸收。我们考虑能够被激发的电子, 对应激发动量 q , 如上页的图。费米球边缘的电子很容易被激发而中心的电子对于给定的 q 要激发就难了, 对应激发形成了上页图中的包络面, 而因此激发的能量 ω 也有一个范围 (共轭) 同向最大激发

$$\hbar\omega_q = \frac{\hbar^2 k^2 + q^2}{2m} - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} (\vec{q} + 2\vec{k} \cdot \vec{q})$$

$$\omega_q \in \left[\frac{1}{2m} q^2 - V_F q, \frac{1}{2m} q^2 + V_F q \right] \text{ (近似)}$$

这个 ω_q 范围就是上上页左图  阴影区域, 计算 χ_0 , 此区域中有 $\text{Im}\chi_0 \neq 0$. 我们同时要关注能够被激发本征模式 ω_q : $\omega_q = \omega_p + Aq^2$ 为图中的线. 那么等离子体激发 $\text{Im}\chi_0 \neq 0$ 耗散使得此过程无法持续, 而被电子气重新吸收.

仅仅有这么一小段 $\text{Im}\chi_0 = 0$. 这说明一旦某个热涨落使得振荡开始, 它就不会停止了, 一直会振荡下去. 从费米球角度看 $\text{Im}\chi_0 \neq 0$ 范围真正有电子被激发到了费米球外, 产生 e_q . e_d 激发的电子波与空穴密度分布, 这是激发态不稳定终会落回来. 而 $\text{Im}\chi_0 = 0$ 此小段“激发”会全在费米球内, 你就看作改变费米球形状变化或是电子重排, 没有激发态. 因此时以日计, 每当有热涨落引发就停不下来, 终所有电子都会参与这一振荡的过程, 称为集体振荡.

此结论类似电动力学. $\omega < \omega_q$, 入射电磁波被金属衰减; 入射频率 $\omega > \omega_q$, 金属“变透明”, 而现在知道 ω 更大甚至能量足以把金属打上激发态, 那自然会衰减, 称为 Landau damping.

Plasmon 就是抗拒粒子空穴激发而去做粒子空穴重排的极化过程.

Chapter 15. Bruus. Fermi-Liquid

所谓准粒子基于绝热近似, 要求其弛豫时间 $\tau_0 = e^{-\gamma}$ 变化极为缓慢 $\gamma \gg \tau^{-1}$ τ 弛豫时间, 即电子受散射的平均时间间隔, 在相当长的范围不会发生, 即处于原本的离散态, 而且其能量要远小于体系能量以避开热激发, 有

$$\tau^{-1} \ll \gamma \ll k_B T$$

在此情况下才可将相互作用看作无相互作用的准粒子激发, 计算准粒子, 计算其受散射平均时长, 可以利用 fermi-golden-rule 以及 conductivity 经典定义:

一: Drude Model: $\dot{v} = 0$.

$$-(-e)E + \frac{mv}{\tau} = 0 \Rightarrow \sigma = \frac{ne^2\tau}{m}$$

二: Fermi-Golden Rule. scattering velocity defined as:

$$T(K' \leftarrow K) = 2\pi |\langle K' | V | K \rangle|^2 \delta(\epsilon_{K'} - \epsilon_K)$$

$$V = \sum_i U(r - R_i) \quad i: \text{impurity position.}$$

得到散射振幅, n_{imp} : number of impurities.

$$T_{K'K} = 2\pi \frac{n_{\text{imp}}}{V} \left| \int dr e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} U(r) \right|^2 \delta(\epsilon_{K'} - \epsilon_K)$$

$$= \frac{n_{\text{imp}}}{V} W_{K'K}$$

三. 粒子数守恒 n_K 变化 = 走去的 + 从 K' 来的.

$$(\partial_t n_K) = - \frac{n_{\text{imp}}}{V} \sum_{K'} [n_K (1 - n_{K'}) W_{K'K} - n_{K'} (1 - n_K) W_{KK'}]$$

$$\Rightarrow (\partial_t n_K) + \mathbf{k} \cdot \nabla_K n_K + \mathbf{v}_K \cdot \nabla_r n_K = - \frac{n_{\text{imp}}}{V} \sum_{K'} W_{K'K} (n_K - n_{K'})$$

$[ne^{i\omega t}]$ 中线性响应. $T \rightarrow 0$ 得到.

$$-i\omega n_k + eE \cdot \hat{k} \delta(k_f - k) = -n_{imp}/V \cdot \sum_{k'} W_{kk'} (n_{k'} - n_k)$$

定义 n_k 的试探解.

$$n_k^{(w)} = \frac{1}{i\omega - 1/\tau} eE \cdot \hat{k} \delta(k_f - k)$$

1/2 类似 $(in)(Im n)$ 寿命为虚部. 代入原方程:

$$\tau^{-1} = \frac{n_{imp}}{V} \sum_{k=k_f} W_{kk'} (1 - \cos \theta_{kk'})$$

利用 $\vec{j} = eE \cdot \sum_{\vec{k}} \vec{v}_k n_k$ 得到: $\rightarrow K_F^3 / 3\pi^2 \propto N$

$$\epsilon = \epsilon_0 \frac{1}{1 - i\omega\tau} \quad \epsilon_0 = \frac{ne^2\tau}{m}$$

因此我们看到电阻 $\rho \propto \tau^{-1} \propto [n_{imp}]^0 \cdot \sum W_{kk'} (1 - \cos \theta_{kk'})$

电阻 (T 小) 正比 T^5 : $n \propto T^3$ 声子模型 $\frac{k_B T}{\epsilon_0} T^2 \nearrow T^3 \times T^2 = T^5$

高温正比 T^2 : $n \propto T$. 后面 $\propto T$ $T \cdot T = T^2$ 电阻结论可由此推.

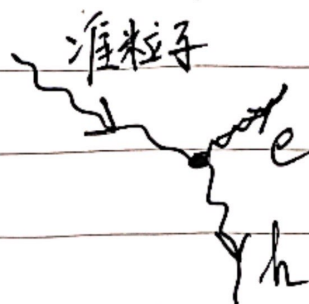
因此也可以见到. 低温下. $\tau \propto \frac{1}{T^2}$ $T \rightarrow 0$ 几乎无穷寿命.

Actually $\tau^{-1} \propto [d(\epsilon_F)]^3 \cdot |W|^2 \cdot \frac{3k^2}{2}$ $\delta_k \sim k_B T$ at 小 T

从公式 $\tau^{-1} = \sum_{k'} W_{kk'} (1 - \cos \theta_{kk'})$ 也可以看出.

对 k 求和.

T^2



散射概率多少?

$$= |\langle \text{准粒子} | W | k_e, k_h \rangle|^2$$

积分: $\sum_{k_i k_e k_h} \epsilon_{k_i} \epsilon_{k_e} \epsilon_{k_h} = [d(\epsilon_F)]^3 \int d\epsilon_{k_i} d\epsilon_{k_e} d\epsilon_{k_h}$ 能量

积分求和变换出 $\epsilon_e + \epsilon_h + \epsilon_{k_i} = \epsilon$ S-function

$= [d(\epsilon_F)]^3 \epsilon^2$ $\int \epsilon d\epsilon = \frac{1}{2} \epsilon^2$

因此看到准粒子寿命 Γ 有 $\Gamma^{-1} \propto [dE]^3$ (积分要求) $\times E^2$ (能量)
 现在我们求准粒子的 Green's Function. 若其和自由费米子 G_0
 Function $G^{(0)}$ 类似, 准粒子近似则是有效的.

$$G^{R(0)}(k, \omega) = \frac{1}{\omega - \epsilon_k + i\eta} \quad i\omega \rightarrow \omega + i\eta$$

$$G^R(k, \omega) = \frac{1}{\omega - \epsilon_k - \Sigma^R(k, \omega)} \quad (i\eta \text{ 归入自能})$$

$$= \frac{1}{\omega - [\epsilon_k + \text{Re}\Sigma^R(k, \omega)] - i\text{Im}\Sigma^R(k, \omega)}$$

谱激发 $A(k, \omega)$

$$A(k, \omega) = 2\pi Z \delta(\omega - \tilde{\epsilon}_k) + A'(k, \omega)$$

Z 为准粒子权重 $\int A'(k, \omega) d\omega = 1 - Z$ δ -function 为自由粒子激发
 而 A' 多体激发有展宽. 自能虚部代表了准粒子的寿命. 定义.

$$\Gamma_k^{-1}(\omega) = -2Z \text{Im}\Sigma^R(k, \omega) \quad \text{峰展宽 } \text{Im}\Sigma, \text{Im}\Sigma \rightarrow 0$$

准粒子质量被重整化:

即 $G \rightarrow G^{(0)}$ 在重整化质量之
 即准粒子合适.

$$\tilde{\epsilon}_k = \epsilon_k + \text{Re}\Sigma(k, \omega) \quad \text{由 } \epsilon = \frac{k^2}{2m}$$

可定义:

$$\frac{m}{m^*} = Z \left(1 + \frac{m}{\epsilon_F} \partial_k \text{Re}\Sigma(k, 0) \right) \Big|_{k=k_F}$$

若 $\text{Im}\Sigma \rightarrow 0$:

$$G = \frac{1}{\omega - \tilde{\epsilon}_k + i\eta} \xrightarrow{\Gamma \rightarrow 0} G^{(0)} \quad \epsilon_k \rightarrow \tilde{\epsilon}_k$$

现在就要表明: $\text{Im}\Sigma$ 会衰减到零, 引出一个重整化质量 ($\text{Re}\Sigma$) 之后的准粒子图景. 高密度下仍可用 RPA 近似: (见上章)

RPA: $\frac{W}{g^{(0)}} = \frac{-W(q)}{1 - \chi_0 W(q)} g^{(0)} \rightsquigarrow \text{bubble diagram} + \dots$

Def: $\epsilon^{\text{RPA}}(q, i\omega_n) = 1 - W(q) \chi_0(q, i\omega_n)$

$$\Sigma_c^{\text{RPA}}(k, i\omega_n) = -\frac{1}{\beta} \sum_{i\omega_n} \frac{1}{V} \sum_q \frac{W(q)}{\epsilon^{\text{RPA}}(q, i\omega_n)} g_c^{(0)}(k+q, i\omega_n) \delta(i\omega_n)$$

从费曼图 RPA 近似中可以摘出上述自能形式

对 ω_n 做 frequency summation. ω_n : Boson.

$$g_c^{(0)}(k+q, i\omega_n) = \frac{1}{i\omega_n - \epsilon_{k+q}} \quad Z_1 = \epsilon_{k+q} - i\eta$$

$n_B(z)$ 引入.

$$Z_2 = i\omega_n$$

$$\epsilon^{\text{RPA}} = 1 - W(q) \chi_0(q, z) = 0$$

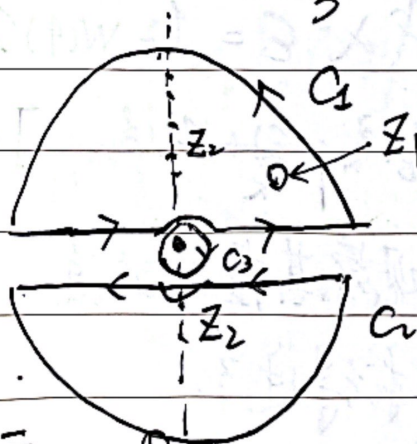
$$Z_3 = \text{Real Number}$$

Contour: 避开实轴.

$$C = C_1 + C_2 + C_3 \text{ 包}$$

其中有:

$$\int_{C_1} + \int_{C_2} = 0 \text{ contour 闭合}$$



$$\Rightarrow \int C = \int_{C_1 \text{ 实轴}} + \int_{C_2 \text{ 实轴}} + \int_{C_3} = \text{Res}_{Z=Z_1, Z_2}$$

$$\text{Res}_{Z_2} = \Sigma_c^{\text{RPA}} \text{ 已知}$$

$$\Rightarrow \Sigma_c^{\text{RPA}} = \int \text{实轴积分} - \text{Res}_{Z=Z_1}$$

$$f(z) = n_B(z) \text{ (or } f(i\omega_n))$$

$$= -\frac{1}{V} \sum_q \int_R \frac{dw}{2\pi i} n_B(w) \cdot \frac{W(q)}{\epsilon_{RPA}(q, w)} g_{(k+q, \delta, (k_n + w))}^{(w)}$$

$$+ \frac{1}{V} \sum_q n_B(\xi_{k+q} - i\epsilon_n) \frac{W(q)}{\epsilon_{RPA}(q, \xi_{k+q} - i\epsilon_n)}$$

取虚部, 第一项虚部在:

$$\frac{1}{ik_n + w - \xi_{k+q}}$$

取推迟自能 $ik_n \rightarrow \epsilon + i\eta$, 取推迟自能虚部

$$I_m \sum_{RPA}^R c k \delta(\epsilon)$$

Math: $g^{(w)} \rightarrow \delta(\epsilon + w - \xi_{k+q})$ 干掉 dw 积分, $n_B(\xi_{k+q} - i\epsilon_n) = -n_F(\xi_{k+q})$
 $[\epsilon_{RPA}(q, w + i\eta)]^* = \epsilon_{RPA}(q, w - i\eta)$

$$\Rightarrow I_m \sum_{RPA}^R c k \delta(\epsilon) = \frac{1}{V} \sum_q [n_B(\xi_{k+q} - \epsilon) + n_F(\xi_{k+q})] \times I_m \left[\frac{W(q)}{\epsilon_{RPA}(q, \xi_{k+q} - \epsilon + i\eta)} \right]$$

利用 ϵ_{RPA} 定义代入 $\epsilon = 1 - W(q)X_0$

$$I_m \sum_{RPA}^R c k \delta(\epsilon) = \frac{1}{V} \sum_q [n_B(\xi_{k+q} - \epsilon) + n_F(\xi_{k+q})] \times \left| \frac{W(q)}{\epsilon_{RPA}(q, \xi_{k+q} - \xi_k)} \right|^2 I_m [X_0^R(q, \xi_{k+q} - \xi_k)]$$

在这里取 $\epsilon = \xi_k$ 观察其虚部的值:

X_0 :  已经求得过了:

$$I_m X_0^R(q, \xi_{k+q} - \xi_k) = -\frac{2\pi}{V} \sum_{k'} [n_F(\xi_{k'}) - n_F(\xi_{k'+q})] \delta(\xi_k - \xi_{k'+q} + \xi_{k+q} - \xi_k)$$

最终得到自能虚部也即准粒子寿命倒数形式: 在 ϵ_k 处.

$$\Gamma_k^{-1} = -2 \text{Im} \sum_{\text{RPA}}^R (k, \epsilon_k)$$

$$= -\frac{4\pi}{V^2} \sum_{q, k'} [n_B(\epsilon_{k+q} - \epsilon_k) + n_F(\epsilon_{k-q})] \times [n_F(\epsilon_{k'}) - n_F(\epsilon_{k'-q})]$$

$$\times \left| \frac{W(q)}{\epsilon_{\text{RPA}}^R(q, \epsilon_{k+q} - \epsilon_k)} \right|^2 \delta(\epsilon_k - \epsilon_{k+q} - \epsilon_{k'-q} + \epsilon_{k'})$$

准粒子 k 与各种 k' 相撞, 每个 k' 与它能交换各种动量 q . 此式即能发生所有散射之集大成, 受粒子占据数(密度)与交换振幅 $|W|^2$ 影响, 共同决定发生的时间间隔.

$$T \rightarrow 0 \quad n_F(\epsilon) = \begin{cases} 0 & \text{above fermi surface} \\ 1 & \text{below fermi surface} \end{cases}$$

上式又等于

$$-n_F(\epsilon_k) [1 - n_F(\epsilon_{k+q})] [1 - n_F(\epsilon_{k'-q})] - [1 - n_F(\epsilon_{k'})] n_F(\epsilon_{k+q}) n_F(\epsilon_{k'-q}).$$

Scatter-out term $T \neq 0$, non-zero for $\epsilon_k > 0$

Scattering in term. non-zero for $\epsilon_k < 0$

when $\epsilon_k \approx \epsilon_{k+q}$ 弱相互作用散射弱. Γ^{-1} 与上文结论相同.

$\Gamma^{-1} = \text{Im} \chi \rightarrow 0 \quad \Gamma \rightarrow \infty$ 准粒子准确 Actually. when $T \rightarrow 0$.

$$\Gamma_k^{-1} = \frac{\sqrt{3}\pi^2}{128} \omega_p \cdot \left(\frac{\epsilon_k}{\epsilon_F} \right)^2$$

总之:

$$\Gamma_k^{-1} \propto (\epsilon_k)^2$$

What's the physical properties of a system.

distributed impurities NO

Chapter 12. 如何处理随机分布的杂质体系

Chapter 16 Bruus. impurity; disorder

杂质随机地分布在体系中, 它的势能写作:

$$H = H_0 + V(r)$$

$$V(r) = \sum_{j=1}^{N_{\text{imp}}} U(r - P_j) \quad P_j \text{ is rand number}$$

电子-杂质耦合作为微扰项:

定义

$$U_q \Rightarrow U(r - P_j) = \frac{1}{V} \sum_q e^{-iq \cdot P_j} U_q e^{iq \cdot r}$$

$$\Rightarrow G_{k_b, k_a}^{(n)} = \left(\sum_{j_1}^{N_{\text{imp}}} \sum_{j_n}^{N_{\text{imp}}} \right) \cdot \frac{1}{V^{n-1}} \sum_{k_1 \dots k_{n-1}} e^{-i(k_b - k_{n-1}) \cdot P_{j_n} + \dots + i(k_1 - k_a) \cdot P_{j_1}}$$

$$G_{k_b}^{(0)} U_{k_b - k_{n-1}} G_{k_{n-1}}^{(0)} \dots U_{k_1 - k_a} G_{k_a}^{(0)} \quad (I)$$

杂质自平均 Self-Average

杂质自平均是对杂质位置做平均, ie:

$$\frac{1}{V} \langle G_{k_b, k_a} \rangle_{\text{imp}} = \delta_{k_b, k_a} \overline{G_{k_a}} \stackrel{(1)}{=} \frac{\delta_{k_b, k_a}}{N_{\text{system}}} \sum_{i=1}^{N_{\text{system}}} G_{k_a}^{(\text{system } i)}$$

$$\stackrel{(2)}{=} \frac{1}{V} \int dP_1 \frac{1}{V} dP_2 \dots \frac{1}{V} \int dP_{\text{imp}} G_{k_a} \delta_{k_b, k_a}$$

对②等号, 这就是位置平均 $\overline{V(r)} = \int V(r, P_i) dP_i \cdot \frac{1}{V}$

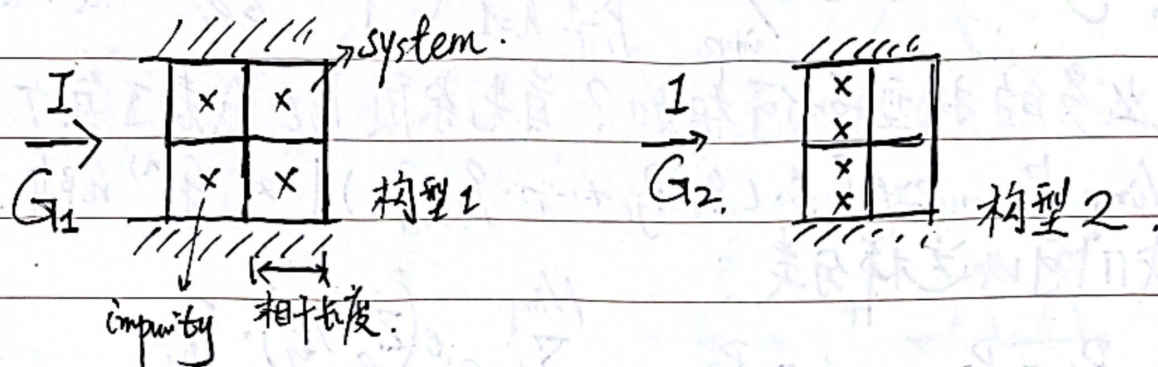
对①等号, 我们要问, Green's Function 物理特性是否可做平均, eg: $\overline{G} = \frac{1}{2} G(\text{P构型1}) + \frac{1}{2} G(\text{P构型2})$ 是否代表了两者某种平均的时间演化? ie: $\overline{G}$ 物理特性是否具有可加性?

★ 相干长度 国外 Green's Function 有可加性

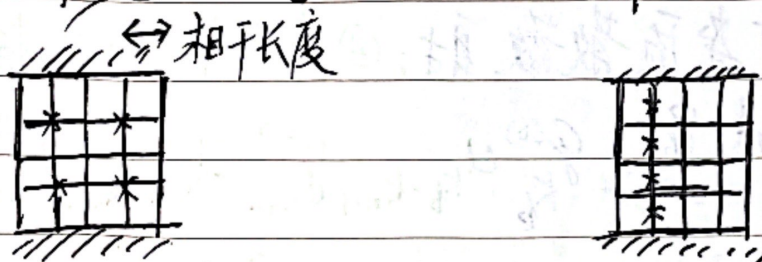
DATE

NOTES

我们知道，物理量空间尺度上有相干特性。随量子涨落（温度）变化。电子在巡游时，受散射而改变相位，在低温时，系统中声子少，电-声耦合少，散射少，相干长度长。此时，杂质自平均不适用。因为 P 构型 1 与 P 构型 2 杂质之间小于一个相干长度，它们相关。G 没有可加性。此时，比如两构型为：



$(G_1 + G_2)^{-1} = (4 \times 1 \text{ 个格子 } 1 + 2 \times 1 \text{ 个格子 } 2) \times \frac{1}{2}$ 有随杂质位置的量子涨落。对应公式 (I)，则是 $g^{(n)}$ (代表电导) 有涨落。而高温时，由于声子数目增长，相干长度减小，此时适用杂质自平均。 $g^{(n)}$ 平滑 (T = 4.1K 可以适用)



所谓可加性，就是指系统被分为无关的 system (格子) 格子间因为超越相干长度无关而可加，而格子内做自平均。我们希望格子内平均不会改变格林函数 林函数性质，即希望杂质在每个格子分布类似的，不会出现全分布在某一个格子情况 (量子涨落所幸，因为温度上升相干长度减小 格子数目变多这种情况越不可能发生，因为数学上中心极限定理保证划分越多偏离分布越小概率。此时，等号①成立，我们计算每个格子中情 公式 (I) 再相加即 Green's Function 相加的结果。

计算每个 system 中 Green's Function. 由于自相似与计算整体数学上无差异.

$$\left\langle e^{i \sum q_i \cdot P_{hi}} \right\rangle_{\text{imp}} = \delta_{0, \sum q_i \cdot P_{hi}} \quad q_i = k_i - k_{i-1}$$

$$\left\langle \sum_{j_1, j_n} e^{i \sum_{l=1}^n q_l \cdot P_{jl}} \right\rangle_{\text{imp}} = \sum_{p=1}^N \sum_{h=1}^P \pi(N_{\text{imp}} \cdot \delta_{0, \sum q_i \cdot P_{hi}})$$

这么多的构型如何相加? 首先杂质 P_{jl} 代表了每个 P_j 要加 N_{imp} 次, $\exp[i \cdot (q_1 \cdot P_{j_1} + \dots + q_n \cdot P_{j_n})]$ 对 $G^{(n)}$ 阶.

我们可以这样分类:

$$\textcircled{1} P_{j_1} = P_{j_2} = \dots = P_{j_n} \quad \sum_{h_1}^{N_{\text{imp}}} e^{i(\sum q_l \cdot P_{h_1}) \cdot P_{h_1}}$$

$$\textcircled{2} P_{j_1} = \dots = P_{j_{n-1}} \neq P_{j_n} \text{ 有 } n-1 \text{ 种, } \sum_{h_1}^{N_{\text{imp}}} \sum_{h_2}^{N_{\text{imp}}} e^{i(\sum q_l \cdot P_{h_1}) \cdot P_{h_1}} e^{i(\sum q_l \cdot P_{h_2}) \cdot P_{h_2}}$$

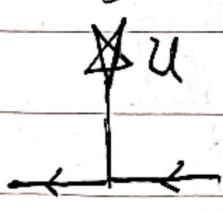
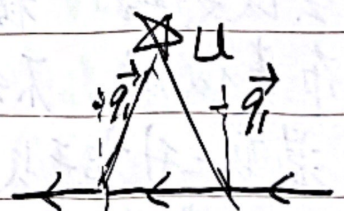
+ ... + ...

① 代表了只有一个杂质散射; ② 有两个, 以此相加 ...

$$G^{(n)} \textcircled{1} = \frac{1}{V^{n+1}} \sum_{h_1}^{N_{\text{imp}}} e^{i A \cdot P_{h_1}} \cdot G_{k_b}^{(\omega)} \cdot U_{k_b - k_{n-1}} \cdot G_{k_{n-1}}^{(\omega)} \cdot U_{k_{n-1} - k_{n-2}} \cdot G_{k_{n-2}}^{(\omega)} \dots U_{k_1 - k_0}$$

$$\langle G^{(n)} \rangle_{\text{imp}} \Rightarrow A = \delta_{0, \sum q_i \cdot P_{hi}} = 0 \quad e^{i A \cdot P_{hi}} = 1 \Rightarrow N_{\text{imp}}$$

$$\langle G^{(n)} \rangle_{\text{imp}} = \frac{1}{V^{n+1}} G_{k_b}^{(\omega)} \cdot U_{k_b - k_{n-1}} \cdot G_{k_{n-1}}^{(\omega)} \dots U_{k_1 - k_0} \cdot G_{k_0}^{(\omega)}$$

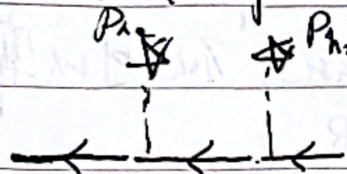
$$\langle G^{(1)} \rangle_{\text{imp}} = \quad n=1 \quad + \quad$$



$$A = q_1 \cdot P_{h_1} + q_2 \cdot P_{h_2} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{q}_1 = -\vec{q}_2$$

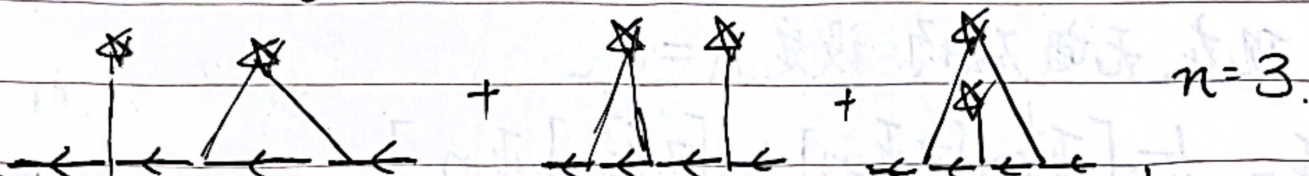
$$q_1 + q_2 + q_3 = 0$$


同理: $\langle g^{(2)} \rangle_{\text{imp}}$ 应有如下形式:



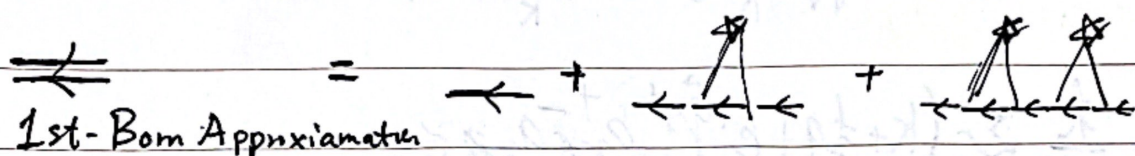
$n=2$

$$q_1 \cdot P_{h1} + q_2 \cdot P_{h2} = 0$$



$n=3$

我们同样取 irreducible graphs. 类似 RPA 方法求出级数求和的通项, 此通项称 Born Approximation.



1st-Born Approximation

$$G_K^{\text{IBA}}(ik_n) = \frac{1}{ik_n - \epsilon_K - \sum_{k'} \chi_K(ik_n)}$$

$$\sum_K^{\text{IBA}} \chi_K(ik_n) = \frac{n_{\text{imp}}}{V} \sum_{K'} |\chi_{K-K'}|^2 \frac{1}{ik_n - \epsilon_K}$$

如何用 Green's Function 求得电导?

电导即流-流关联函数.

|| 顺流

| 抗流

$$\chi_{\alpha\beta}^{\text{R}}(r, r'; \omega) = \frac{ie^2}{\omega^2} \Pi_{\alpha\beta}^{\text{R}}(r, r'; \omega) + \frac{ie^2 n(r)}{\omega m} \delta(r-r') \delta_{\alpha\beta}$$

$$\Pi_{\alpha\beta}^{\text{R}}(r, r'; \omega, t-t') = C_{j_0^{\alpha}(r) j_0^{\beta}(r')}^{\text{R}}(r-r') = -i\theta(t-t') \langle [\hat{j}_0^{\alpha}(r, t), \hat{j}_0^{\beta}(r', t')] \rangle_0$$

Fourier.

$$\Pi_{xx}(\tilde{q}) = -\frac{1}{v_F} \langle j_x(\tilde{q}) j_x(-\tilde{q}) \rangle$$

$$\tilde{q} = (q, iq_n) \text{ 4-vector}$$

DATE

$| \rangle_0$ 指的是无 $V(r)$ 外电磁场, $H = H_0 + H_{imp} \Leftrightarrow H_0$ 为 $| \rangle_0$ Basis $| \rangle_0$ 就是 $| H \rangle$ basis 仍要算相互作用 Basis, 不过可以算直流电导: $Re \delta_{\alpha\beta} = -e^2 \lim_{\omega \rightarrow 0} \lim_{q \rightarrow 0} \frac{1}{\omega} \text{Im} \Pi_{\alpha\beta}^R(q, \omega)$

现在, 无电磁场. 设定 $A = 0$

$$J = \frac{1}{mi} [\Psi^\dagger(r) [\nabla \Psi(r)] - [\nabla \Psi^\dagger(r)] \Psi(r)]$$

$$\Psi^\dagger(r) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_K e^{-ik \cdot r} a_K^\dagger$$

$$\Rightarrow J(r) = \frac{\hbar}{mV} \sum_{Kq} (K + \frac{1}{2}q) e^{iq \cdot r} a_{K\sigma}^\dagger a_{K+q,\sigma}$$

$$\Rightarrow J_x(\tilde{q}) = \int_0^\beta d\tau e^{(iq_n)\tau} \frac{1}{2m} \cdot \frac{1}{V} \cdot \sum_{K\sigma} (2K+q)_x C_{K\sigma}^\dagger(\tau) C_{K+q,\sigma}(\tau)$$

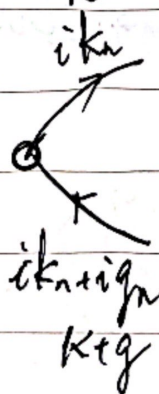
$$\text{由于} \int e^{iq_n \tau} e^{-ik_x \tau} e^{ik_x \tau} C_{K\sigma}^\dagger(k_1) C_{K+q,\sigma}(k+q) d\tau d\sigma d\mathbf{k} d\mathbf{q}$$

$$\Rightarrow (K+q - K + q_n) = 0 \Rightarrow q = q_n$$

$$= \frac{1}{2m} \frac{1}{\beta} \sum_{ik_n} \frac{1}{V} \cdot \sum_{K\sigma} (2K+q)_x C_{K\sigma}^\dagger(ik_n) C_{K+q,\sigma}(ik_n + iq_n)$$

$$= \frac{1}{2m\beta V} \sum_{\tilde{K}} \sum_{\sigma} (2K_x + q_x) C_{K\sigma}^\dagger(\tilde{K}) C_{\sigma}(\tilde{K} + \tilde{q})$$

$$J_x(\tilde{q}) =$$

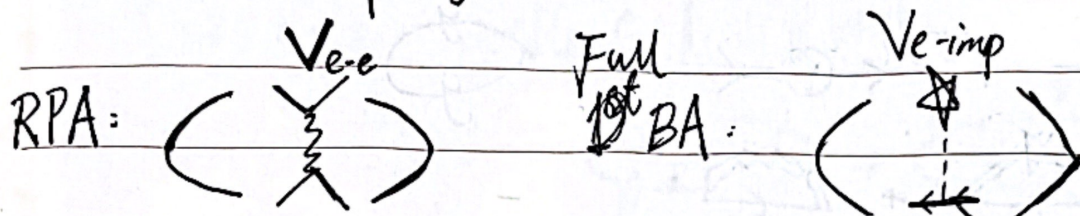


calculate: $\langle J_x(\vec{q}) J_x(-\vec{q}) \rangle$

$H = H_0 + \text{electron-impurity} + \text{electron-electron}$

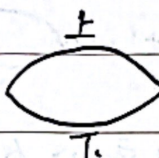
For electron-electron, we use RPA for interactive electron gas.

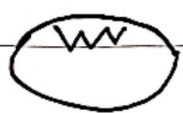
For electron-impurity, we use 1st BA



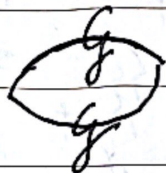
RPA + BA $(V_{e-e} + V_{e-imp})(V_{e-e} + V_{e-imp}) \dots$



如果用 G 代替 $G^{(0)}$ 可以忽略  "上"与"下"中的细节, 只要画上、下的连线. 即: eg.



included in



Σ : irreducible self-energy

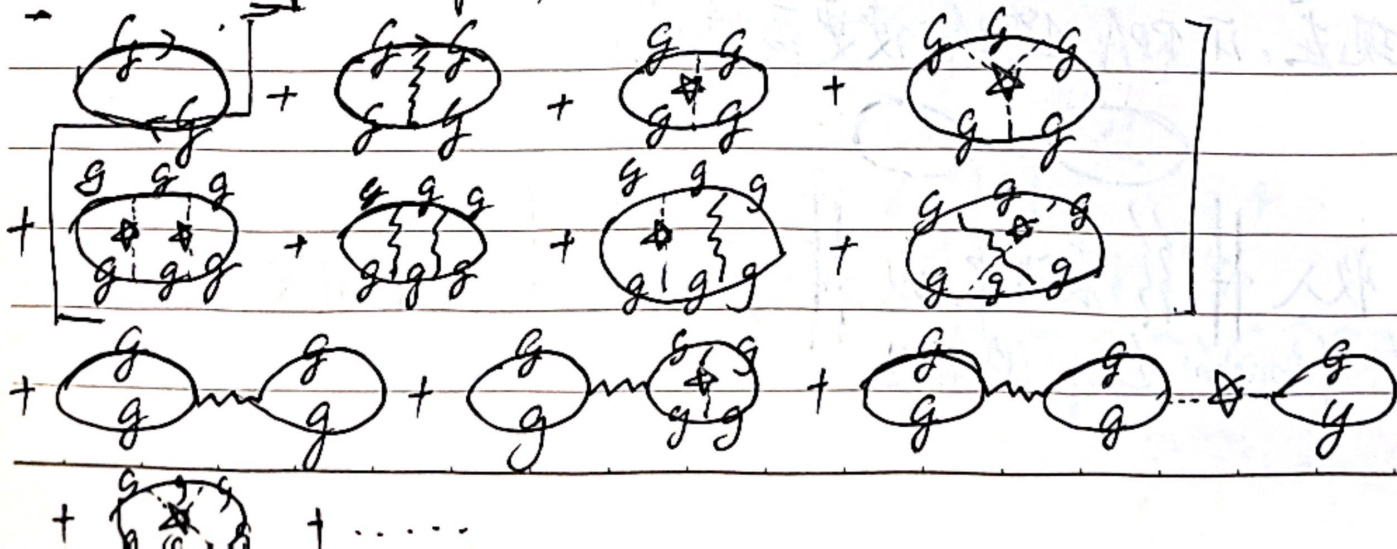


G 为单电子 Green's Function, 为:

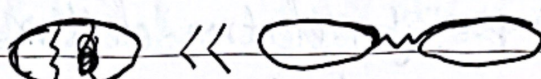
$$G = \text{---} = \text{---} + \text{---} \Sigma \text{---} = G^{(0)} + G^{(0)} \Sigma G$$

 included in G

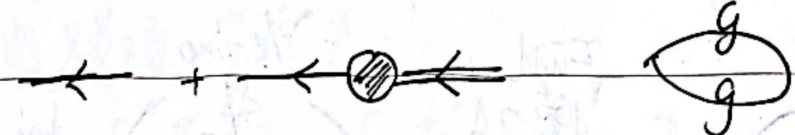
则: $\langle J_x(\vec{q}) J_x(-\vec{q}) \rangle$ 图示: 仅上下连线.

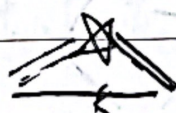


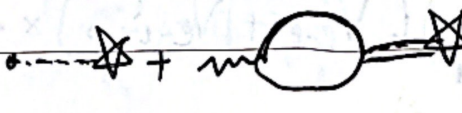
现在我们有3图示. 写出 χ 的通项: 

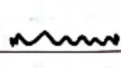
RPA认为:  因极点远不如后者.

$$\Sigma^{RPA} = \text{wavy line} + \text{wavy line} \circ \text{wavy line} + \text{wavy line} \circ \text{wavy line} \circ \text{wavy line}$$

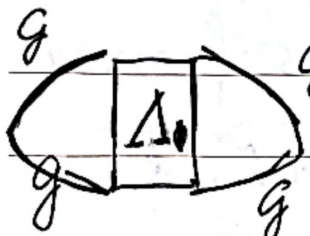
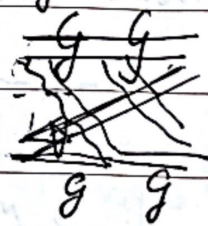
对于: $g =$ 

 $=$  $+$ 

 1st BA: 

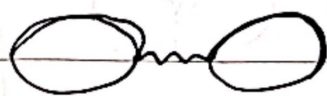
 RPA:  $+$ 

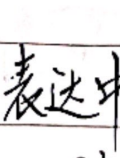
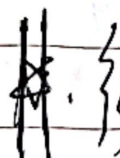
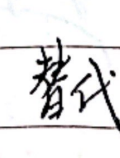
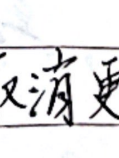
现在对于全图. 把中间部分全部记作 Λ

 $\Lambda_1 =$  $+$  $+$  $+$ 
 $+$  $+$  $+$  $+$ $\dots$

之前, 用 g 替代 $g^{(0)}$ 使图只能上、下连线

现在, 用 RPA 1st BA 使更高阶项:

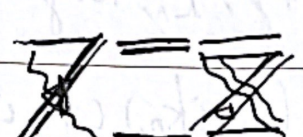


收入   表达中, 以   替代   取消更多的 fermion loop 的出现.

Λ_{10} 中为什么没有 $\{\}$? 现在 irreducible graph 升级为 irreducible line-crossing graph. 即上.下各切一次不能分作两张图. 这实际上是一阶图 $(\frac{1}{2})^2$ 平方.

计算 Λ 时, 要把 reducible Graphs 考虑进来.

$$\Lambda = \text{loop with } \Lambda \text{ inside} = \text{self-energy} + \text{self-energy} \circ \Lambda + \text{self-energy} \circ \Lambda \circ \Lambda + \dots$$

这样图如:  也被概入.

$$= \text{self-energy} \times (\hat{1} + \Lambda + \Lambda \circ \Lambda + \dots)$$

$$\equiv \text{self-energy} \circ \Lambda \quad \text{而} \quad \begin{matrix} k, i k_n \\ i k_n + i q_n, k + q \end{matrix}$$

$$= - \int d\vec{k} G(k+q, i k_n + i q_n) G(k, i k_n) \cdot \frac{1}{2m} (2k_x + q_x) \cdot \underbrace{I_{\alpha}^{ck, q, i k_n + i q_n}}_{I_{\alpha}^{ck, ck_n; k+q, i k_n + i q_n}}$$

其中: $I_{\alpha}(\tilde{k} + \tilde{q}, \tilde{k})$ or $I_{\alpha}(k+q, i k_n + i q_n; k, i k_n)$

$$\Delta = 0 + \Lambda_1 + \Lambda_1 \circ \Lambda_1$$

$$= 0 + \Lambda_1 \times (0 + \Delta + \dots)$$

$$= 0 + \Lambda_1 \times \text{self-energy} \quad \text{而} \quad \begin{matrix} k+q' \\ k+q \end{matrix} \quad \begin{matrix} k \\ k+q+q' \end{matrix}$$

故:

$$I_{\alpha}(\tilde{k} + \tilde{q}, \tilde{k}) = I_{\alpha}^{ck, q, \tilde{k}} + \int \frac{1}{2m} (k_x + q_x) d\tilde{q}' \times I_{\alpha}^{ck, \tilde{k}, \tilde{q}'} G(\tilde{k} + \tilde{q}) G(\tilde{k} + \tilde{q} - \tilde{q}') \times I_{\alpha}^{ck, \tilde{k} + \tilde{q} + \tilde{q}', \tilde{k} + \tilde{q}'}$$

对 Λ_1 再应用 1st BA 与 RPA: ; 并有图式

$$\Lambda_1 \approx \text{diagram 1} + \text{diagram 2} \quad \text{diagram 3}$$

图论给出结论. 综上所述 仅散射项保留了下列

$$\langle \hat{J}_x(q) \tilde{J}_x(q) \rangle = \text{diagram 1} \approx \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \text{diagram 4} + \text{diagram 5}$$

$$= - \int d\tilde{k}' I_{ox}(\tilde{k}', \tilde{k}+q) g(\tilde{k}') g(\tilde{k}+q) I_x(\tilde{k}+q, \tilde{k}')$$

其中: $I_{ox} = \frac{1}{2m}(2k_x + q_x)$ $\tilde{k}', \tilde{q}' = (k', i\epsilon_n)(q', i\epsilon_n)$.

$$g = g^{(0)} + g^{(0)} \Sigma g; \quad \Sigma = \text{diagram 1} + \text{diagram 2}$$

$$\text{diagram 1} = \text{diagram 2} + \text{diagram 3} \quad \text{diagram 4} = \text{diagram 5} + \text{diagram 6}$$

$$\text{diagram 1} = Uq; \quad \text{diagram 2} = Vq; \quad \text{diagram 3} = \chi^{(0)} = \sum_{p_n} g_c^{(0)}(\tilde{p}+\tilde{q}) g_c^{(0)}(\tilde{p})$$

$$\text{其中: } I_x(\tilde{k}+\tilde{q}, \tilde{k}') = I_{ox}(\tilde{k}, \tilde{k}+\tilde{q}) + \int d\tilde{q}' \Lambda(\tilde{k}, \tilde{q}', \tilde{q}) \times$$

$$g(\tilde{k}+\tilde{q}) g(\tilde{k}+\tilde{q}+\tilde{q}') \times I_x(\tilde{k}+\tilde{q}+\tilde{q}', \tilde{k}'+\tilde{q}')$$

$$\text{其中: } \Lambda(\tilde{k}, \tilde{q}', \tilde{q}) = \text{diagram 1} + \text{diagram 2} \equiv \tilde{W}(\tilde{q}')$$

而 $\tilde{W}(\tilde{q}')$ 易求:

$$\tilde{W}(\tilde{q}') = W_{c\tilde{q}'}^{RPA} + n_{imp} \frac{U(q)U(q')}{\epsilon_{c\tilde{q},0}^{RPA} \epsilon_{c\tilde{q}',0}^{RPA}} \delta_{q,0}$$

$$W_{c\tilde{q}}^{RPA} = \frac{\text{diagram 1}}{1 - \text{diagram 2}} \quad \epsilon_{c\tilde{q},0}^{RPA} = 1 - \frac{e^2}{\epsilon_0 q^2} \chi^{(0)}(q,0)$$

Finish the calculation using the results above; calculate Π .
 $q=0$, 中性 e-e, 阳离子系统. separate $\tilde{K}$:

$$\Pi_{xx}(0, i\eta) = -\frac{1}{\beta V} \sum_{ikn} \sum_K T_{0X}(k, k) G(k, i\eta) G(k, i\eta + i\eta_n) T_X(k, k; i\eta_n, i\eta_n)$$

summation. $(i\eta_n)$ 1

① 极点: $G(k, i\eta) = \frac{1}{i\eta - \tilde{\epsilon}_k - \Sigma(k, i\eta)}$

$$\Sigma(k, i\eta) = \text{triangle diagram} + \text{bubble diagram} = g_{\tilde{c}k, i\eta}^{(0)} \cdot \tilde{W}(k)$$

$$z = i\eta$$

$$G(z) = \frac{1}{z - \tilde{\epsilon}_k - \frac{1}{z - \tilde{\epsilon}_k} \cdot \tilde{W}(k)}$$

极点位于:

$$(z - \tilde{\epsilon}_k)^2 = \tilde{W}(k) \quad \text{而 } \tilde{W}(k) \in \mathbb{R} \Rightarrow \tilde{W}(k) \in \mathbb{R} > 0$$

$$\Rightarrow z = \pm [\tilde{W}(k)]^{1/2} + \tilde{\epsilon}_k. \quad z \in \mathbb{R} \text{ 极点位于实轴上.}$$

② 极点 $G(k, i\eta_n + i\eta)$ 只是做平移. 极点在 $\text{Im} = -i\eta_n$ 上.

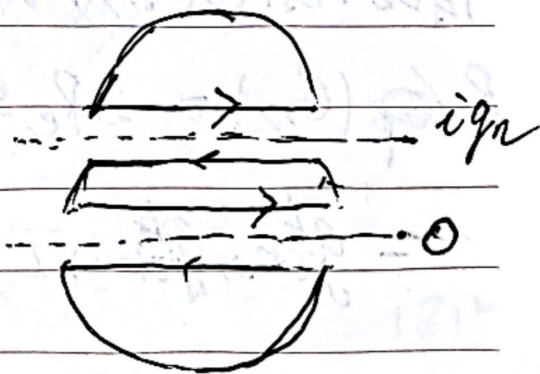
$$C: \int_C \left[\int_{\text{Line 1}} n_F \cdot \Pi_{xx} + \int_{\text{Line 2}} n_F \cdot \Pi_{xx} \right] = \int_{\text{大圈}} = 0.$$

$$\int_C = \text{Res}_{\text{极点 inside}} = \text{Res}_{n_F(z)} = \text{原式}.$$

$$\text{即原式} = \int_{\text{Line 1}} n_F \cdot \Pi_{xx} + \int_{\text{Line 2}} n_F \Pi_{xx} \quad \text{记 } \Pi_{xx} = f(\epsilon_{kn}, \epsilon_{kn} + i\eta).$$

$$= - \int_{\mathbb{R}} \frac{d\epsilon}{2\pi i} n_F(\epsilon) \cdot [f(\epsilon + i\eta, \epsilon + i\eta_n) - f(\epsilon + i\eta, \epsilon + i\eta_n)] - \int_{\mathbb{R}} \frac{d\epsilon}{2\pi i} n_F(\epsilon + i\eta_n).$$

$$[f(\epsilon + i\eta_n, \epsilon + i\eta) - f(\epsilon + i\eta_n, \epsilon - i\eta)]$$



Retard: $iq_n \rightarrow \omega + i\eta$ $S^R(\omega)$.

$f^{RR}(a, b)$ $a: iq_n \rightarrow \omega + i\eta$ $b: iq_n \rightarrow \omega + i\eta$

$f^{AA}(a, b)$ $a: iq_n \rightarrow \omega - i\eta$ $b: iq_n \rightarrow \omega - i\eta$

$$S^R(\omega) = \int_R \frac{d\varepsilon}{2\pi i} [n_F(\varepsilon) - n_F(\varepsilon + \omega)] f_{(c, \varepsilon + \omega)}^{AR}$$

$$- \int_R \frac{d\varepsilon}{2\pi i} n_F(\varepsilon) \cdot f_{(c, \varepsilon + \omega)}^{RR} - n_F(\varepsilon + \omega) f_{(c, \varepsilon + \omega)}^{AA}$$

$$f_{(c, \omega - i\eta, \omega - i\eta)}^{AA} = f_{(c, \omega + i\eta, \omega + i\eta)}^{RR} = f_{(c, iq_n, iq_n)}$$

$$\Rightarrow (f^{AA})^* = f^{RR}$$

因此, 当取 $\text{Im} S^R(\omega)$, 展至 ω 1阶时: (直流电导 $\omega \rightarrow 0$)

$$\text{Im} S^R(\omega) = \omega \text{Im} \left[\int_R \frac{d\varepsilon}{2\pi i} - \frac{\partial n_F(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \cdot \left[f_{(c, \varepsilon)}^{AR} - f_{(c, \varepsilon)}^{RR} \right] \right]$$

提供 ω^1 提供 ω^0

此 ω^0 项为零.

且当低温 $T \rightarrow 0$, $\partial n_F(\varepsilon) / \partial \varepsilon \approx \delta(\varepsilon)$.

$$\Rightarrow \text{Im} S^R(\omega) \approx \frac{\omega}{2\pi} \text{Re} [f_{(0,0)}^{AA} - f_{(0,0)}^{AR}]$$

when $T \rightarrow 0$; $q \rightarrow 0$; $\omega \rightarrow 0$

因此, 代入 Π_{xx} 式中, 利用 $\text{Re} \delta_{\alpha\beta} = \frac{-e^2}{\omega} \text{Im} \tau_{\alpha\beta}$

$$\text{Re} \delta_{xx} = 2 \text{Re} \frac{e^2}{2\pi} \frac{1}{V} \sum_K \tau_{xx}(k, k) \left[\underset{\uparrow}{\underset{(G^A(k,0))}{G^A(k,0)}} G^R(k,0) \tau_{xx}^{RA}(k, k; 0, 0) \right. \\ \left. - G^A(k,0) G^A(k,0) \tau_{xx}^{AA}(k, k; 0, 0) \right]$$

calculate I_x : 代入上页 I_x 定义式中. 代入 $w(q)$

$$w(q) = \frac{\sim}{1 - \sim} + n_{imp} \frac{u(q) u(1-q)}{\epsilon_{c(q)}^{RPA} \epsilon_{(1-q)}^{RPA}}$$

前半部分 w^{RPA} 先不考虑, 之后讨论中再加入, 前代入后半:

$$I_x(k, k; i\kappa_n + iq_n, i\kappa_n) = I_{ox}(k, k) +$$

$$\frac{1}{V} \sum_{q'} n_{imp} |u_{c(q')}^{RPA}|^2 \cdot g_{ck+q', i\kappa_n} g_{ck+q', i\kappa_n+iq_n} I_x(ck+q', k+q', i\kappa_n+iq_n, i\kappa_n)$$

定义: $I(k, \epsilon) = \tilde{K} \gamma(k, \epsilon) / m$ 用 $k' - k = q$ 定义 k' , 求和 k' 替 q :

$$\Rightarrow \gamma(k, k; i\kappa_n + iq_n, i\kappa_n) = 1 + \frac{1}{V} \sum_{k'} n_{imp} |u_{c(k'-k)}^{RPA}|^2 \cdot g_{ck', i\kappa_n}$$

$$g_{ck', i\kappa_n+iq_n} \cdot \frac{\vec{k} \cdot \vec{k}'}{|\vec{k}|^2} \cdot \gamma(k', k'; i\kappa_n+iq_n, i\kappa_n)$$

$(\omega + i\eta)^p (\omega - i\eta)$ 找到 $\gamma^{RR} \gamma^{AA}$; $\omega \rightarrow 0$ $i\kappa_n \rightarrow \epsilon + i\eta$

$$\gamma_{(k, \epsilon)}^{Rx} = 1 + \frac{1}{V} \sum_{k'} n_{imp} |u_{c(k'-k)}^{RPA}|^2 \cdot G^x(k', \epsilon) G^R(k', \epsilon) \frac{k \cdot k'}{|k|^2} \cdot \gamma_{(k', \epsilon)}^{Rx}$$

其中 $x = A \text{ or } R$

Calculate $G^A(k, \epsilon) G^R(k, \epsilon) = |G^R(k, \epsilon)|^2$

$$G^R(k, \epsilon) = \frac{1}{\epsilon - \frac{1}{2} \hbar \omega - \sum^R(k, \epsilon)}$$

$$|G^R(k, \epsilon)|^2 = \frac{1}{\text{Im} \sum^R(k, \omega)} \cdot \text{Im} \frac{1}{\epsilon - \frac{1}{2} \hbar \omega - \sum^R(k, \omega)}$$

$$|G^R(k, \epsilon)|^2 = \frac{1}{\text{Im}(G^{-1})} \cdot \text{Im} G^R = \frac{\text{Re}^2 Z + \text{Im}^2 Z}{\text{Im} Z} \cdot \text{Im} Z = |Z|^2$$

因此: $G^A(k, \epsilon) G^R(k, \omega) = I A(k, \epsilon)$

$I^{-1} = -2 \operatorname{Im} \Sigma^R(k, \epsilon)$ 寿命 $A(k, \omega) = -2 \operatorname{Im} G^R(k, \omega)$ 谱函数

当 $n_{\text{imp}} \rightarrow 0$ $A \rightarrow \delta$ -function 无杂质即自由激发.
 $I \rightarrow n_{\text{imp}}^{-1}$ 寿命无限长自由粒子.

因此若考虑 $\lim_{n_{\text{imp}} \rightarrow 0}$ 时 γ^{RR} 为 $n_{\text{imp}} G^R G^A$

$$= \sum_{k'} n_{\text{imp}} \cdot \frac{n_{\text{imp}}^{-1}}{I} \cdot \delta(\epsilon - \epsilon_k) = \sum_{k'} \delta(\epsilon - \epsilon_k) \text{ 有限}$$

因此 $\gamma^{RA} \propto \sum_{k'} \frac{1}{n_{\text{imp}}} G^R G^A$ 为有限值.. 而..

$$\gamma^{RR} \Rightarrow G^R G^R = \frac{(\epsilon - \epsilon_k)^2 - (\frac{1}{2I})^2}{[(\epsilon - \epsilon_k)^2 + (\frac{1}{2I})^2]^2} + i(\epsilon - \epsilon_k) A(k, \epsilon)$$

当 $n_{\text{imp}} \rightarrow 0$ $I^{-1} \rightarrow 0$ 第二项

前一项 $\propto \frac{1}{(\epsilon - \epsilon_k)}$ 积分为有限 后一项 $(\epsilon - \epsilon_k) \delta(\epsilon - \epsilon_k)$ 积分为 0

$\times n_{\text{imp}}$ 为 0.

因此 $G^R G^R \Rightarrow 0$. 仅考虑 $G^R G^A$ 即可.

把 1: $G A G^R$ 结论代入 $\operatorname{Re} \delta_{xx}$ 与 I_x 式中:

$$\operatorname{Re} \delta_{xx} = \operatorname{Re} \frac{2e^2}{V} \cdot \sum_k I_{ox}(k, k) \delta(\epsilon_k) \underbrace{I_x^{RA}(k, k; 0, 0)}_{I_0}$$

$$= \operatorname{Re} 2e^2 \sum_k \left(\frac{k_x}{m} \cdot I_0 \delta(\epsilon_k) \right) \cdot \left(\frac{k_x}{m} \cdot \gamma^{RA}(k, k; 0, 0) \right)$$

$\epsilon_k = 0$ 即 $\sum_k \frac{k_x^2}{m^2} \delta(\epsilon_k) \Rightarrow E_k = \mu$ 就在 ($T \rightarrow 0$ 费米能级上)

$\Rightarrow k = k_F$ (注意是 $E_k = \mu$ 由 $\epsilon_k = 0$ 推出, 并非 $T \rightarrow 0$)

因此: $\text{Re } \delta_{xx} = \frac{e^2 n}{m} I_0 \gamma_{C k_F, k_F; 0, 0}^{\text{RA}}$

其中: $k_F^3 = 3\pi^2 n$; $I_0 = -2 \text{Im} \sum_{\mathbf{k}}^R (\mathbf{k}, 0)$

限制: ~~750~~: $\omega \rightarrow 0$; $q = 0$; $n_{\text{imp}} \ll$ 系统尺寸密度

calculate: $\gamma_{C k_F, k_F; 0, 0}^{\text{RA}}$

$$\gamma_{C k_F}^{\text{RA}} = 1 + \frac{2\pi}{V} \sum_{\mathbf{k}'} n_{\text{imp}} |U_{C \mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\text{RPA}}|^2 \delta(\mathbf{z}_{\mathbf{k}}) \left(\frac{\mathbf{k}_F \cdot \mathbf{k}'}{|\mathbf{k}_F|^2} \gamma_{C \mathbf{k}'}^{\text{RA}} \right)$$

$\delta(\mathbf{z}_{\mathbf{k}}) \Rightarrow \mathbf{z}_{\mathbf{k}} = 0$ 同样 $\gamma_{C \mathbf{k}'}^{\text{RA}} = \gamma_{C \mathbf{k}_F}^{\text{RA}}$ $\Downarrow 1$

因此, 求解:

$$\gamma^{\text{RA}} = 1 + \left[\frac{2\pi}{V} \sum_{\mathbf{k}'} n_{\text{imp}} |U_{C \mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\text{RPA}}|^2 \delta(\mathbf{z}_{\mathbf{k}}) \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}'}{|\mathbf{k}|^2} \right] (I_0 \gamma^{\text{RA}})$$

可求解出 γ^{RA} . ~~750~~: $\gamma^{\text{RA}} = \frac{I_{\text{tr}}}{I_0}$

$\gamma^{\text{RA}} = \frac{1}{1 - \lambda I_0}$; $\lambda \propto n_{\text{imp}} = I_0^{-1}$ 比如为: $|U(\omega)|^2 \frac{2\pi}{V} = C_0$

$$\Rightarrow \text{Re } \delta_{xx} = \frac{n e^2}{m} I_0 \frac{1}{1 - C_0 I_0^{-1} I_0} = \frac{n e^2}{m} \left(\frac{I_0}{1 - C_0} \right) = \frac{n e^2}{m} \cdot I_{\text{tr}}$$

因此:

$\sigma = \frac{e^2 n I_{\text{tr}}}{m}$ I_0 : ~~自由电子~~ 受杂质屏蔽后, 准粒子寿命变为 I_{tr} , 代入电导结果与半经典,

Drude Model 求解解相同.

当 $n_{\text{imp}} \rightarrow 0$; $T \rightarrow 0$: 直流电导 ($\omega, q \rightarrow 0$) 限制下

接下来讨论 $W(q)$ 中 W^{RPA} 项对电导的贡献。

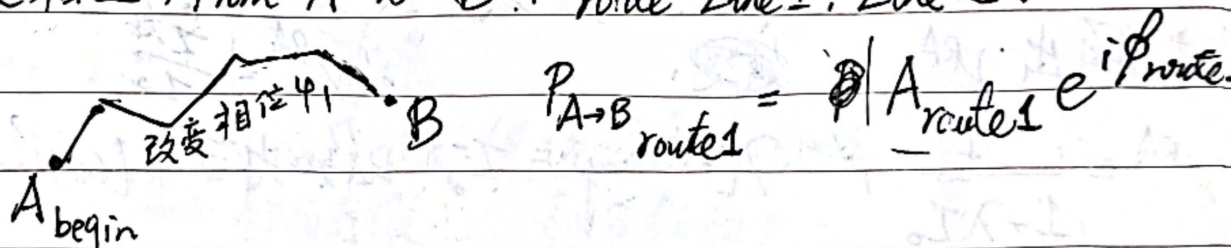
$W^{RPA}(0, iq_n)$. 在前几章叙述过, 准粒子的质量会被重整化。
Mass Renormalization. 相互作用

$$\gamma = \frac{ne^2 I_{tr}}{m} = \frac{ne^2 Z_0^*}{m/m^*} \quad Z_0^* = \frac{m}{m^*} Z_0 \left(\frac{Z_0}{Z_0^*} \right) = Z_0^*$$

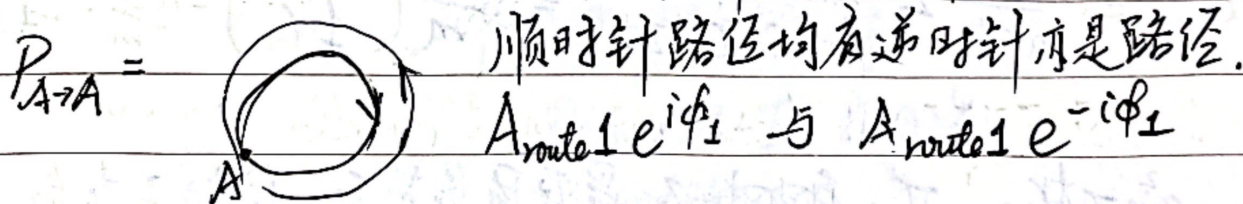
因此 Drude Model 中为 bare Mass 裸质量, 系其重整化因子被吸收入 I_{tr} 中了 (Green Function 计算导致)

Weak Localization:

唯象: 低温当相干长度甚大, 一个相干长度中电子多次散射改变相位, From A to B. route Line 1, Line 2.

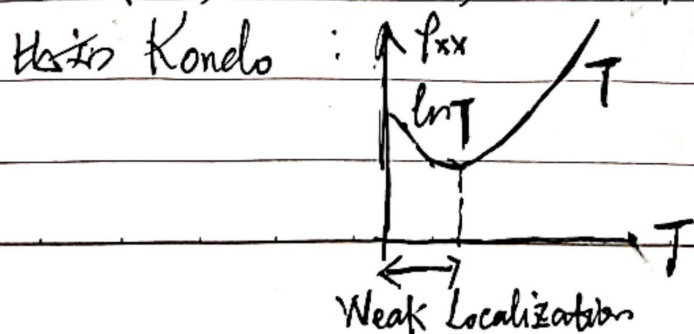


考虑闭合路径. 从 A 回到 A 概率为 注意每个



要相干叠加. $P_{A \to A} = 4 A_{route 1}^2$ 而经典仅为 $2 A_{route 1}^2$

说明量子涨落使电子倾向于保持原位, 不动, 即较局域化, 而低温多次散射使产生大量相干路径成为可能.

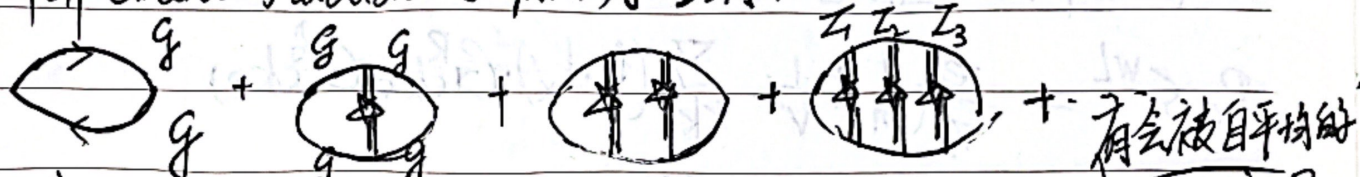


电子自平均：我们回顾该过程，高温下该过程之所以可行系仅受一次散射，用 1BA 近似可行，而相对于 $P_1 = \dots = P_n$ 杂质位置完全相同，即 $\mathcal{G}$ 中散射过程可以用改变相位来描述：

$e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}_i}$ $i=1 \sim n_{imp}$ 对每个 i 对电子做自平均 $e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}_i} = e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{0}} = 1$

相位因子必定消失得不到弱局域化。而在低温时，1BA 失效出现了 $\mathcal{G}$ 中更多次散射项 $\overline{\mathcal{G}\mathcal{G}}$ ，注意 $\overline{\mathcal{G}\mathcal{G}}$ 而非 $\overline{\mathcal{G}}\overline{\mathcal{G}}$ 使得做平均时会出现与电子位置无关的项而平均下来非零。因此我们计算这些更高阶散射能得到弱局域化对电导的影响，这也是为什么 Kondo Model 中需计算 $\Sigma^{(3)}$ 至 3 阶散射才能看到 $\ln T$ 的修正项。

计算 Green's Function 时 原本为 1BAT.



代表了 1 阶散射，因为散射只在 (I_1, I_2, I_3) 时刻点发生。引入 $e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}_{I_1}} \times e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}_{I_2}} \times e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}_{I_3}}$ 项，现在多重散射中还有出现如下的交叉项。

$$\pi_{xx}^{WL}(\tilde{q}) = \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \dots$$

这一类交叉最猛烈的图称 Maximumly crossed diagrams.

我们计算这一类图对电导的贡献：

发现：

$$\pi_{xx}^{WL(3)}(\tilde{q}) = \text{Diagram 1} \Leftrightarrow \text{Diagram 2} = \text{Diagram 3}$$

因此：

$$\pi_{xx}^{WL}(\tilde{q}) = \text{Diagram 1} \sim C = \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \dots$$

与 $\mathcal{G}$ 不同 Δ 不同的是 C 上下 Green's Function 同向

同样写出 σ 与 C 的通项.

$$\Pi_{xx}^{WL}(\tilde{q}) = -\frac{1}{(2mV)^2} \int d\tilde{k} d\tilde{k}' (2k_x + q_x) \cdot g(\tilde{k}) g(\tilde{k} + \tilde{q}) \times$$

$$C(\tilde{k}, \tilde{k}', \tilde{q}) g(\tilde{k}') g(\tilde{k} + \tilde{q}) (2k'_x + q'_x)$$

令 $q=0$; $W_0 = \hbar = n_{imp} \cdot |U_0|^2$ 记 $k+k' \equiv Q$ $C(Q, k, \dots)$

$$C(Q; i k_n + i q_n, i k_n) = \frac{\frac{1}{V} \sum_p W_0 g(Q-p, i k_n + i q_n) g(p, i k_n) W_0}{1 - \frac{1}{V} \sum_p W_0 g(Q-p, i k_n + i q_n) g(p, i k_n)}$$

能量守恒

再代入 $G^R G^A$ ($i k_n \rightarrow \omega \pm i\eta$)

低温 $T \rightarrow 0$ 直流 $\omega \rightarrow 0$

$$\text{Re } \sigma_{xx}^{WL} = \frac{e^2}{\pi} \left(\frac{1}{m}\right)^2 \frac{1}{V} \cdot \sum_{k, k'} (k_x k'_x) \cdot G^R(k, 0) G^A(k, 0)$$

$$\times C^{AR}(k+k', 0, 0) G^R(k', 0) G^A(k', 0).$$

$$C^{RA}(Q) = \frac{W_0 \zeta(Q)}{1 - \zeta(Q)} \quad \zeta(Q) = \frac{n_{imp}}{V} \sum_p |U_0|^2 \cdot G^R(Q-p, 0) G^A(p, 0)$$

令 $I_0^{-1} = -2 \text{Im} \sum_k^R R(0)$ 展开 $G^R G^A$ 为: $\frac{1}{-3p - i/2 I_0}$

可以验证: $\zeta(\omega) = 0$ 即 $Q=0$ 为 C^{RA} 发散点.

即 $k+k'=0$ 时 此项对电导有最大贡献率. 把 $\zeta(Q)$ 在 $Q=0$ 附近做 Taylor 展开近似 $\zeta(Q)$

~~$\zeta(Q)$~~

▲ 我们会看到维度 N_{dim} 在其中发挥的作用:

Taylor 展开到 Q^2 :

$$\partial G^R(\alpha-p, 0) / \partial \alpha \big|_{\alpha=0} \cdot Q$$

$$\begin{aligned} \tilde{g}(Q) = & \tilde{g}(0) + \frac{n_{imp}}{V} |U_0|^2 \sum_p \left(\frac{1}{z_p + i/2I_0} \right)^2 \cdot \left(\frac{\partial z_{\alpha p}}{\partial \alpha} \bigg|_{\alpha=0} \cdot Q \right) \cdot \left(-\frac{1}{z_p - i/2I_0} \right) \\ & + \frac{n_{imp}}{V} |U_0|^2 \sum_p \left(\frac{1}{z_p + i/2I_0} \right)^3 \left[\frac{\partial z_{\alpha p}}{\partial \alpha} \bigg|_{\alpha=0} \cdot Q \right] \cdot \left(-\frac{1}{z_p - i/2I_0} \right) \end{aligned}$$

$$\sum_p = \int d\epsilon \cdot \frac{dN}{d\epsilon} d(\epsilon_F)$$

$$\text{原式} = \frac{dp}{d\epsilon} \cdot \frac{dz_{\alpha p}}{d\alpha} \bigg|_{\alpha=0} = d(\epsilon_F) \cdot \frac{dz_{\alpha p}}{d\alpha} = \frac{dN}{d\alpha} \bigg|_{\alpha=0} = \frac{V_F^2}{N_{dim}}$$

N_{dim} 的引入系费米面不同维度下填充电子能态差异.

做下半平面围道积分. $I_0 \gg 1$ 保留 I_0^3 项. 得到:

$$\tilde{g}(Q) \approx 1 - D I_0 Q^2 \quad D = \frac{V_F^2 I_0}{N_{dim}}$$

将 $\tilde{g}(Q)$ 结果代入 π^{WL} 中. 则电导:

$$\sigma^{WL} = \frac{2e^2}{m^2 \pi} \cdot \frac{W_0}{I_0} \cdot \frac{1}{V^2} \sum_{Q, k} (-k_x)^2 G^R(k, 0) G^A(k, 0) \frac{1}{D Q^2} G^R(\alpha, k, 0) G^A(\alpha, k, 0)$$

计算:

$$\frac{1}{V} \sum_k G^R(k, 0) G^A(k, 0) G^R(-k, 0) G^A(k, 0) k_x^2 G^R = \frac{1}{-z_k + i\eta - i/2I_0}$$

取实部 $\text{Re} \sigma = \text{Re}(\dots)$ 维度又出现.

$$= d(\epsilon_F) \cdot \left[\frac{k_F^2}{N_{dim}} \right]_R \int d\epsilon \cdot \left(\frac{1}{z^2 + (1/2 I_0)^2} \right)^2 = \frac{4\pi k_F^2}{N_{dim}} d(\epsilon_F) I_0^3$$

$\vec{k}_x = \frac{1}{\sqrt{3}} \vec{k}_F$

$$\sigma^{WL} = (\dots) \cdot \frac{1}{N_{dim}} \sum_Q N_{dim} (\dots) \quad \begin{array}{l} \text{这一对 } N_{dim} \text{ 先消掉} \\ I_0 \text{ 也消掉了} \end{array}$$

$\uparrow$
 $D=1$

$$= (\dots) \left[\sum_{Q \rightarrow 0} \frac{1}{Q^2} \right] = \int d\vec{Q} \frac{1}{Q^2} = \int dQ \cdot \frac{Q^{N_{dim}-1}}{Q^2}$$

我们要处理这个无穷问题, $N_{dim}=1$; $N_{dim}=2$ 此积分均发散. 我们得到了无穷的电阻!

我们必须引入 $\gamma = \hbar / l_p$

$$g(Q) = e^{-\gamma} (1 - D I_0 Q^2) \quad \text{代入再算一遍}$$

l_p 是相干长度. 定义 $I_0 = \hbar / v_F$.

修正电阻为:

$$\delta_{xx} = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{I_0}{D}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{D I_0}{C_0^2}} \propto (I_0)^{1/2} & 1D \\ \frac{1}{4D\pi} \ln(1 + \frac{D I_0}{C_0^2}) \propto \ln(\frac{I_0}{I_0}) & 2D \\ \frac{1}{2\pi^2 l_0} - \frac{1}{2\pi^2 D \sqrt{D I_0}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{D I_0}{C_0^2}} \propto (I_0)^{-1/2} & 3D \end{cases}$$

$$\delta\sigma \propto -\delta_{xx}$$

$e^{-\gamma}$ 项引入系引入了实际的体系. 之前仅考虑 Hamiltonian, perturbation. 才有关联无穷长. 实际上 $g(Q)$ 衰减必然与关联长度有关. 仅 $l_p \rightarrow \infty$ 时才有无穷 $g(Q)$ 关联. 引入 $e^{-\hbar/l_p}$ $l_p \rightarrow \infty$ $g(Q) \rightarrow g(Q) = 1 - D I_0 Q^2$

结论是实际体系中

$$1D \quad \delta\sigma^{WL} \propto -(I_0)^{1/2}$$

当 $T \rightarrow 0$ $\delta\sigma^{WL} \rightarrow -\infty$ 完全无导电. 说明 1D 杂质无序排列使得体系完全局域化.

3-D 中: $\sigma(T) \propto (T\phi)^{-1/2}$. 随 $T\phi$ 出现金属-绝缘体相变 $T \rightarrow 0$.
 $\delta \omega L \rightarrow \infty$. 完全导通; 2-D: $\delta \sigma \propto \ln T\phi \Leftrightarrow \ln T$ similar to our Kondo result.

Disordered mesoscopic system.

介观尺度, 电导存在量子涨落; 上文电子自平均可得到宏观尺度中的电导, 此则不可. 对 (10nm) 测量电导: 就考虑两个量子点之间的散射, 用 S 矩阵刻画之, 现在就要将 S 矩阵对于杂质做平均...

$$S = \begin{pmatrix} r & t' \\ t & r' \end{pmatrix} \quad C_{out} = S C_{in}$$

$$G = \frac{2e^2}{h} T_r(t^\dagger t)$$

$$S = U^\dagger U$$

么正矩阵系综平均: 对称性. $2(2N)$ 时间反演.

$$\langle U_{\alpha\beta} \rangle = 0 \quad \langle U_{\alpha\beta}^* U_{\gamma\delta} \rangle = \frac{1}{M} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta}$$

$$\langle U_{\alpha a}^* U_{\beta b}^* U_{\gamma c} U_{\delta d} \rangle = \frac{1}{M^2-1} (\dots) = \frac{1}{M(M^2-1)} \dots$$

即:
$$\langle G \rangle = \sum_{n=1}^N \sum_{m=N+1}^{2N} \langle S_{nn}^* S_{mm} \rangle$$

$$\langle G \rangle_{B \neq 0} = \frac{2e^2}{h} N/2$$

$$\langle G \rangle_{B=0} = \frac{2e^2}{h} \frac{N^2}{2N+1}$$

Anderson Localization:

一般电导与维度关系 $R = \frac{1}{G} = \frac{V}{I}$ $G \propto \frac{1}{V} = neVs/V$

1-D: $\vec{V} = Ed$ $d = L$ $S_{\text{面积}} = 1$ $G \propto \frac{1}{L}$

2-D: $\vec{V} = Ed$ $d = L$ $S = L$ $G = \text{const}$

3-D: $\vec{V} = Ed$ $d = L$ $S = L^2$ $G \propto L$

实际由上文“弱局域化”讨论要由于量子相干性修正电导，引入费曼图，在微扰框架下得到 G 在原先基础上的修正。

从而得到相变的规律

然而，当 disorder 非常强时，微扰会失效。

REF: Anderson Localization. Looking Forward. Lecture.

Boris Altshuler. Columbia University.

$\chi = (\partial n / \partial \mu \cdot D) = \text{态密度} \times \text{扩散系数}$

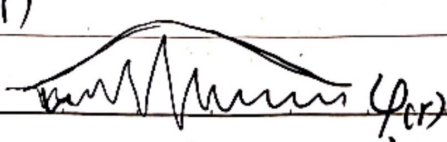
何为局域？从 Elstein 随机行走的想法来看，每个步长可随机向左 or 右走，终成正态分布，而无限步长后若 $\langle r^2 \rangle \propto t$ or 无限次终回原点，称 Extended；若 $\langle r^2 \rangle \rightarrow \text{const}$ ；有限次回归原点，此行走必局域于某处。

一般 Random Memory Walk without Memory；经典情况 always diffusion $\partial_t - D \nabla^2 \rho = 0$ 满足扩散方程 $\Rightarrow \langle r^2 \rangle = Dt$

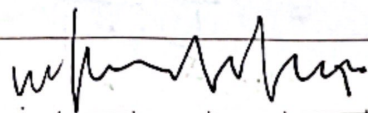
在量子情况下有延展与局域态，满足 Schrodinger Equation.

$$\left(-\frac{\nabla^2}{2m} + U(r) - E_F\right) \varphi_Q(r) = \sum_Q \varphi_Q(r)$$

其中随机杂质分布体现为 on-site 的 $U(r)$ 是随机势能；而波函数 $\varphi(r)$



Localized



Extended.

如果 $|\psi(r)|^2 \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 0 (L^{-d})$ 为 Extended.

$|\psi(r)|^2 \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0 (e^{-r/\xi})$ 为 Localized  指数衰减.

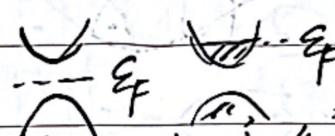
就是要判断 $\psi(r)$ on-site ψ 随机的强烈程度 $r \rightarrow \infty$

对于 $|\psi(r)|^2$ 的相变影响.

Write out Hamiltonian.

$$\hat{H} = \underbrace{\psi_i}_{\text{Random}} (\text{on-site energy}) + (-t) (\text{Hopping nearest-neighbor}).$$

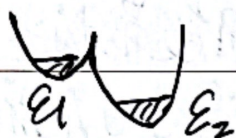
when $t < t_c$ Insulator $t > t_c$ Metal.

这里 insulator-metal 相变并非如能带论中,  ϵ_F ; 费米面有 density of states 金属相变; DOS=0 绝缘无法被激发; 在此多体强关联中并无能带概念, 此时虽然 DOS $\neq 0$, 但 $\psi(r)$ 是 Localized t 无关传播出去, 为 Mott 多体表达的绝缘; 不同于 Mott-Insulator 为 on-site ψ 极大的局域, 现在随机极强, 即强 disorder 时亦会有局域化.

对应 Anderson Insulator, 此时弱局域化带来的电导减少连在了一起, 相干长度不仅很难向外传播, 甚至走不出声去, 形成局域态.

2-site Anderson Model.

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & t \\ t & \epsilon_2 \end{pmatrix}$$



$\epsilon_1 \neq \epsilon_2$ 为随机势能.

Eigenvalue: $E_2 - E_1 = \sqrt{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + t^2} \approx$

$\epsilon_1 - \epsilon_2$	$ \epsilon_1 - \epsilon_2 \gg t$
t	$ \epsilon_1 - \epsilon_2 \ll t$

Eigenfunction:

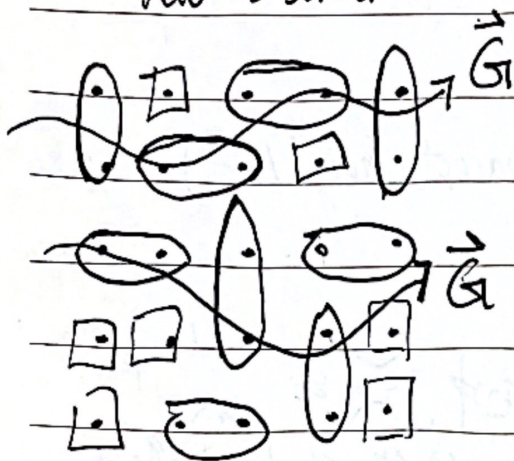
$$\psi_{1,2} = \psi_{1,2} + O\left(\frac{t}{|\epsilon_1 - \epsilon_2|}\right) \psi_{2,1} \quad |\epsilon_1 - \epsilon_2| \gg t$$

$$\psi_{1,2} = \psi_{1,2} \pm \psi_{2,1} \quad |\epsilon_1 - \epsilon_2| \ll t$$

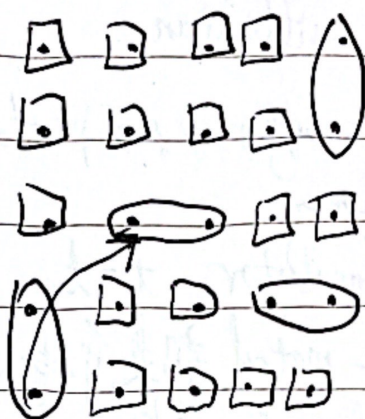
$\psi_{1,2}$ 为单粒子波函数.

从上述结果看出 $\psi_{1,2} \propto \psi_{1,2} |G_{12}|$ 较大; 即当 disorder 强, 两粒子无关联, 回到原本单粒子的局域态, 而 $\psi_{1,2} \propto \psi_{1,2}$ 可以形成 dimer, . 波函数可以通过 dimer 传播出去. 图示为: Resonance.

Few Disorder



Strong Disorder.

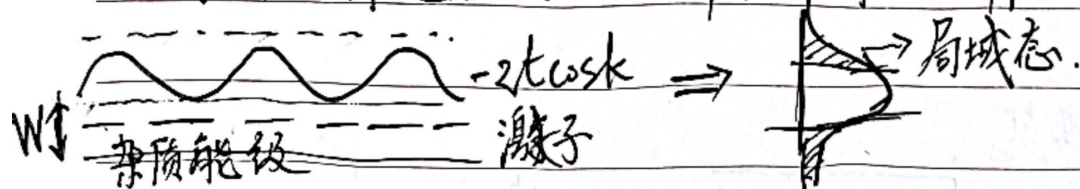


Anderson Metal. 存在较多 overlap 的 dimer 电导借此传播.

Anderson Insulator, 存在多 on-site dimer, 电导无法传播.

并且存在一个 t_c , 当 dimer 数量到了一定程度, 突然足够多: 电导打通. 是一个相变 $G \rightarrow$ (连续) (一阶).

如果仍然假定可用能带描述. 杂质在能带外, 体现为束缚能级 "激子", 越来越多激子与能带耦合体现为带尾的局域态:

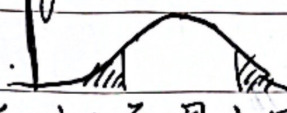


在局域态中, 比如能量较低时, 电子束缚在杂质能级附近, 这种偏离 $-2t \cos k$ 的耦合之后会以 $(Im \epsilon)$ 准粒子寿命描述. 随着系统越来越无序, 杂质能级遍历自由能带, 即 $|G_{12}| = W$ 可覆盖所有带, 使得全部呈局域态, 即 $t > t_c$. 在 DOS 中存在中间

的延展态; $t < t_c$ 尽是局域态。

最后, 从 Green's Function 来看. $G_{ii}(t)$ 代表了零时刻在 i 格点处的粒子. t 时刻亦在 i 处, $G_{ii}(t) = 0$. 说明电子走了, 否则就是局域态; 从自能虚部来看 $\text{Im} \Sigma \propto \omega^{-1}$; $\text{Im} \Sigma = 0$; 准粒子寿命无限. 此时 $i(G_{ii}(t)) = e^{-iE_0 t}$ ~~延展态~~ ~~局域态~~ 局域态.

$\uparrow g(E)$.

Argument I: [局域态出现在带尾. ]; 随无序增加, 延展态消失, 尽是局域态]. 后半句话从上图可知; 从能带来看 (如果有) DOS 低处能量低的无序部分被填充. 无序也是存在一个分布的. 无序程度较低时, 处于低能量无序部分少 ~~多少~~ $\rightarrow E$ (较有序). 与之相近电子态少, 难以借此通行以导通 $\text{on-site } U$ 体现为上局域态; 而当无序程度增加时, ~~少少少少~~ $\rightarrow E$ (无序);

$W = |E_2 - E_1|_{\text{typical}}$ 变大; 处于低能 $\text{on-site } U$ 量态分布相近电子态少的范围变大, 甚至整个 $\text{on-site } U$ 分布范围. 处处电子态都是少不足以形成延展态; 体系亦尽是局域态. 并且, 局域态与延展态不能共存, 因为共存表示两者能量相同. 任意小微扰会使两者混合. 不可能是相同能量本征态. 因此, Anderson 相变电导应为跳变 (整数 Quantum Hall); 但是会根据维度的标度理论而修正.

Argument II. Green's Function 确定了相变位置: $(\frac{W}{t})$ 的值. [注意] $e^{-iE_0 t}$ 代表局域态, 若 $E_0 \rightarrow \infty$; $G_{ii}(t) = 0$ 才为延展态. 虽然 $\text{Im} \Sigma = 0$ 就相当于只有 H_0 . 但是此基于紧束缚模型的