

1-D Interacting model Bosonization + RG (Part1)

这次读书会时我想说明这样一个技术：利用玻色化方法可以处理一维费米子相互作用体系，著名的就是Luttinger液体。我们会看到费米子模型变成了连续玻色场体系。后面的读书会上会看到重整化流的参数就包含在这个玻色场中，从而可以分析相。比如Hubbard-Kitaev模型有几篇文章就是这么做的。这个技术相当复杂，这次玻色化的部分也有许多深刻的地方我也许理解不对。

REF

- [1]《Many-Body Theory in Condensed Matter Physics—An Introduction》Henrik Bruus and Karsten Flensberg
- [2] R. Shankar, Quantum Field Theory and Condensed Matter—An Introduction (Cambridge University Press, Cambridge, 2017).
- [3]I.Mahyach and E.Ardonne, study of the phase diagram of the Kitaev-Hubbard chain , phys.rev.B,101,085125(2020)
- [4]Armin Rahmani1, Xiaoyu Zhu1,2, Marcel Franz1, and Ian Affleck,Phase diagram of the interacting Majorana chain model.Phys. Rev. B 92, 235123(2015)

Luttinger Liquid

Luttinger液体是非费米液体，是玻色化方法应用的典型例子。我们可以先采用费米液体理论处理一维相互作用电子气模型，来看看其缺陷在哪里。我们要找寻电子如果可以被准粒子表述，那就会有准粒子激发谱。得到激发谱需要两个公式，第一个是介电常数的dielectric function. (Bruus, Chap6.4)

dielectric function的经典表示就是 $\epsilon = 1 - V_q \rho_{ind} / \phi_{total}$ ，或 $\epsilon \cdot \phi_{total} = \phi_{ext}$ 。介电常数的定义就是外场所能激发的总电荷，在线性相应理论中写作：

$$\epsilon(q, \omega) = 1 - V(q) \frac{2}{V} \sum_k \frac{n_F(\xi_{k+q}) - n_F(\xi_k)}{\xi_{k+q} - \xi_k - \omega + i\eta} \quad (1)$$

在RPA近似下面自能只保留到一阶的圈图，此时 $\chi(q, \omega) \rightarrow \chi_0(q, \omega)$ ：

$$\epsilon(q, \omega) = 1 - V(q) \frac{2}{V} \chi_0(q, \omega) \quad (2)$$

其中 $\epsilon(q, \omega)$ 的不同数值代表了准粒子激发的不同模式，比如 $\epsilon(q, \omega) = 0$ 的准粒子在无外场下仍可以形成内部的电荷密度分布 ρ_q ，这也是我们需要的，通过(1)式中左边为零，最终可以解出 $\omega = \omega(q)$ 的准粒子激发谱。

另外一个公式就是极化率的形式，极化率的虚部代表了准粒子的寿命，虚部非零，准粒子才得以激发，这由Lindhard formula给出：

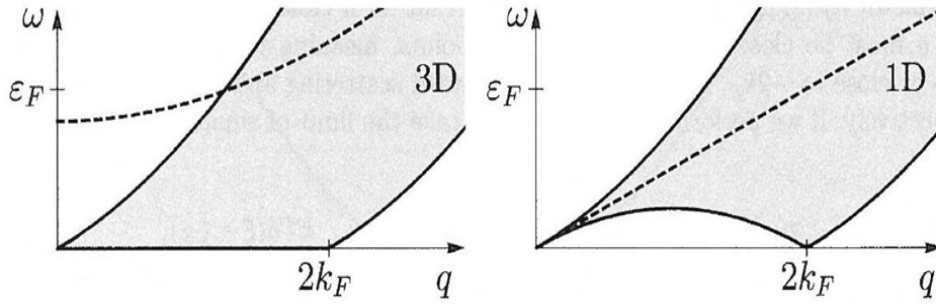
$$\chi_0 = \frac{1}{V} \sum_k \frac{n_F(\xi_{k+q}) - n_F(\xi_k)}{\xi_{k+q} - \xi_k - \omega + i\eta} \quad (3)$$

一维和三维的区别一是在于 $V(q)$ 的形式，需要对实空间的库伦作用做一维和三维的傅里叶变换产生了差异，其中 a 是为了避免一维傅里叶变换发散做的截断。更重要的是在于对 \mathbf{k} 的求和会变为对于 dk 的一维或三维积分，下面是它们的差异：

$$\omega_{1D} = q \sqrt{\frac{4e_0^2}{\pi v_F} \ln\left(\frac{1}{qa}\right)} \quad (4)$$

$$\omega_{3D} = \omega_p + \frac{v_F^2}{\omega_p} q^2 \quad (5)$$

下面是准粒子激发的 $\omega - q$ 关系，其中阴影部分是极化率虚部非零的区域，可以由上面的Lindhard formula给出，虚线为在 $\epsilon(q, \omega) = 0$ 的模式下的色散关系 $\omega = \omega(q)$ ：



可以画一个费米球理解这个问题，三维接近费米速度的处激发 q 总能通过“转”让它无激发能量，而一维的限制让它总要有激发能量。

之所以说费米液体理论失效，可以通过计算准粒子寿命来表示，

$$\tau^{-1} = -2\text{Im}\chi$$

三维时： $\tau^{-1} \sim T^2$ 。在相空间中只有费米能级附近一个尺度下的电子能参与散射，而零温下不存在这个尺度，不会散射，零温时准粒子寿命无穷，费米液体理论适用。一维时 $\tau^{-1} = \text{const}$ ，这表明即使是零温下也存在一些散射机制要干掉准粒子，比如说集体激发的关联。

Bosonization of Luttinger Liquid

想要把相互作用费米子系统变为玻色系统，可以从二次量子化哈密顿量出发，一维相互作用电子气在动量空间的哈密顿量为：

$$\begin{aligned} H_0 &= \sum_k \xi_k c_k^\dagger c_k \\ H_{\text{int}} &= \frac{1}{2\mathcal{L}} \sum_{kk'q} V(q) c_k^\dagger c_{k'}^\dagger c_{k'-q} c_{k+q} \\ \xi_k &= \varepsilon_k - \mu \approx (|k| - k_F) v_F \end{aligned} \quad (6)$$

把 k 动量的电子看作要么是左移的 $k > 0$ ，要么是右移的 $k < 0$ ，从而产生的是“左移费米子算符”与“右移费米子算符”：

$$c_k = c_{kR} \Theta(k) + c_{kL} \Theta(-k)$$

定义左移和右移的密度算符为：

$$\begin{aligned} \rho_R(q) &= \sum_{k>0} c_k^\dagger c_{k+q} \approx \sum_{k>0} c_{kR}^\dagger c_{k+qR}, \\ \rho_L(q) &= \sum_{k<0} c_k^\dagger c_{k+q} \approx \sum_{k<0} c_{kL}^\dagger c_{k+qL}, \end{aligned} \quad (7)$$

从而可以把哈密顿量表示为：

$$\begin{aligned} H_0 &= \frac{2\pi v_F}{\mathcal{L}} \sum_{q>0} [\rho_R(-q) \rho_R(q) + \rho_L(q) \rho_L(-q)] + C(N_L, N_R), \\ H_{\text{int}} &= \frac{1}{2\mathcal{L}} \sum_{q \neq 0} V_1 [\rho_R(q) + \rho_L(q)] (\rho_R(-q) + \rho_L(-q)), \\ V_1 &= V(0) - V(2k_F). \end{aligned} \quad (8)$$

说明一下这个变换如何处理哈密顿量的：正是因为一维体系的特点，散射都发生在费米面附近，也就是只有 k_F 和 $-k_F$ 两处。所有的散射过程中，相互作用只能使得 k_F 到 $-k_F$ 附近， $-k_F$ 到 k_F 附近，以及 k_F 到 k_F 附近， $-k_F$ 到 $-k_F$ 附近，这两个过程可以发生。譬如 k_F 到 k_F 附近，却想使得另一个电子 k_F 到 $-k_F$ 附近概率几乎为零。（半满的时候还有一个 **Umklapp processes**，此时 $+2k_F$ 等价于 $-2k_F, 4k_F = \mathbf{G}$ ）。如果不是一维体系，各种各样的 q 都可以完成这个散射过程，再分为 L 与 R 两部分就没有意义了。现在只要关注这几项就可以了，而它们恰好可以写作（8）式的形式。

对于无相互作用部分，即使不存在 q 的内容，仍然想把它变为 $\rho(q)$ 的形式。注意到了 **Kac-Moody** 代数：

$$\begin{aligned} [\rho_R(q), \rho_R(q')] &= -\frac{qL}{2\pi} \delta_{q+q',0} \\ [\rho_L(q), \rho_L(q')] &= +\frac{qL}{2\pi} \delta_{q+q',0} \\ [\rho_R(q), \rho_L(q')] &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

它使得无相互作用哈密顿量满足对易关系： $[H_0, \rho_L(q)] \approx qv_F \rho_L(q)$ 。要注意这就是一个类似海森堡运动学方程的形式，实际上玻色化是基于运动方程类比地构造出来的。公式（8）中的玻色哈密顿量确实验证是满足这个对易关系的，它并非唯一选择。所谓的理论等价，只是指运动方程等价。也就是说常数可以任意选取，这里的常数特意选取了

$$C(N_L, N_R) = \frac{\pi v_F}{2L} (\hat{N}^2 + \hat{J}^2) \quad (10)$$

其中 $N = N_L + N_R$, $J = N_L - N_R$, 这一项在海森堡对易关系里是零。我们知道在费米子体系里面 $q = 0$ 描述了一个电荷密度均匀分布的状态， $q \neq 0$ 是一个涨落，体现在 $\rho(q)$ 上面。 $q = 0$ 的部分也必须包含进去，这是玻色化之后所没有的项，就是所谓的化学势，体现的是总粒子数。把费米部分的化学势摘出来，固定总粒子数下它就是一个常数，加到玻色系统里作为基底能量，就是公式10的常数。最终可以看到玻色表象 ρ_{Rq}, ρ_{Lq} 下面是可对角化的形式，在该表象下的本征能量也可以解出了。

接下来尝试把这个哈密顿量连续化，我们处理的是费米面附近的低能激发，实际上连续化需要一个缓变的场，而晶格场又是剧变的，两者在低能等效中可以共存（姚老师暑校的说法）：

$$\begin{aligned} c_j &= \int_{2\Lambda} dk c_k e^{ix} \text{(在费米面附近 } 2\Lambda \text{ 小区间积分, } x = ja \text{ 离散变量)} \\ &= \int_{2\Lambda \text{ LEFT}} + \int_{2\Lambda \text{ RIGHT}} \text{(对一维成立)} \\ &= \psi_L(x) e^{ik_F x} + \psi_R(x) e^{-ik_F x} \\ \text{where } \psi_L(x) &= \int_{2\Lambda \text{ LEFT}} d\Delta k c_{(-k_F + \Delta k)} e^{i\Delta k x} \end{aligned}$$

剧变来源于 $e^{ik_F x}$ ，导致了 c_j 的剧变，场 $\psi_L(x)$ 是缓变的，因此虽然 $x = ja$ 是离散变量可以连续处理。因此直接对密度算符做傅里叶连续化， $\rho_L(q) \rightarrow \rho_L(x)$ ：

$$H_0 = \pi v_F \int_{-\mathcal{L}/2}^{\mathcal{L}/2} dx [\rho_R(x) \rho_R(x) + \rho_L(x) \rho_L(x)] + C(N_L, N_R) \quad H_{\text{int}} = \frac{V_1}{2} \int_{-\mathcal{L}/2}^{\mathcal{L}/2} dx [\rho_R(x) + \rho_L(x)] [\rho_R(x) + \rho_L(x)] \quad (11)$$

如同上文低能的动量截断，对应长波尺度要做位置截断。定义(忽略了一个基底常数)：

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial_x \phi(x) &\equiv \rho_R(x) + \rho_L(x) \\ -\frac{1}{\sqrt{\pi}} P(x) &\equiv \rho_R(x) - \rho_L(x) \end{aligned} \quad (12)$$

这两个场如同共轭的位置和动量满足哈密顿动力学。得到最终的哈密顿量为：

$$\begin{aligned} H &= \frac{\tilde{v}}{2} \int_{-\mathcal{L}/2}^{\mathcal{L}/2} dx \left[g P^2(x) + \frac{1}{g} (\partial_x \phi(x))^2 \right] \\ g^{-1} &= \sqrt{1 + \frac{V(0) - V(2k_F)}{\pi v_F}}, \quad \tilde{v} = \frac{1}{g} v_F \end{aligned} \quad (13)$$

Fermonic Field in Representation of Bosonic Field

上面的过程只是把哈密顿量用它的密度算符来表示，就算做玻色化了。更一般的，能否把一个费米子场，在一维，低能的条件下表示为玻色子场的形式？我们知道，费米子场满足以下两个规律。第一反对易关系，第二与密度算符的对易关系，第二个式子确保了 $\psi_r^\dagger(x)$ 的物理定义：在位置 x 增加了一个费米子，从而改变了该点的密度。

$$\psi(x) \psi^\dagger(y) + \psi^\dagger(y) \psi(x) = \delta(x - y) \quad (14)$$

$$[\rho_{r'}(y), \psi_r(x)] = -\delta_{r,r'} \delta(x - y) \psi_r(x) \quad (15)$$

也就是说这样一个玻色场需要替代上面费米场的位置，满足上面二式，从公式(12)中已经知道密度算符可以表示为一对共轭玻色场的形式： $\rho_R = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}(\partial_x\phi - \partial_x\theta)$ ，其中 $\partial_x\theta = P(x)$ 。能否把费米场表达为这两个场的组合呢？

定义 **Bosonization Identity**:

$$\psi_R(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} F_R e^{-i\sqrt{4\pi}\phi_R(x)} \quad (16)$$

其中 $\phi_R = \frac{1}{2}(\phi - \theta)$, $\phi_L = \frac{1}{2}(\phi + \theta)$ 我们要利用从密度算符对易关系得到的玻色场算符的对易关系 $[\phi(x), \partial_y\theta(y)] = i\pi\delta(x-y)$ ，指数展开公式： $e^A e^B = e^{A+B} e^{1/2AB-BA}$,等等（过程太长，详见Bruus Chap19.7）。其中 α 为截断。

作为一个例子，可以证明下面的式子成立，即自由费米子场可以由自由玻色场表示

$$\begin{aligned} H_F &= \int \left[\psi_+^\dagger(x) (-i\partial_x) \psi_+(x) + \psi_-^\dagger(x) (i\partial_x) \psi_-(x) \right] dx \\ &= H_B = \frac{1}{2} \int \left[\Pi^2 + (\partial_x\phi)^2 \right] dx \end{aligned} \quad (17)$$

$$\psi^\dagger(x) (\partial_x) \psi(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \psi^\dagger(x) \left(\frac{\psi(x+\epsilon) - \psi(x-\epsilon)}{2\epsilon} \right)$$

利用 $e^A e^B = e^{A+B} e^{1/2AB-BA}$, $[\phi(x), \partial_y\theta(y)] = i\pi\delta(x-y)$

$$\begin{aligned} \psi_+^\dagger(x) \psi_+(x+\epsilon) &= \frac{1}{2\pi\alpha} e^{-i\sqrt{4\pi}\phi_+(x)} e^{i\sqrt{4\pi}\phi_+(x+\epsilon)} \\ &= \frac{1}{2\pi\alpha} e^{i\sqrt{4\pi}[\phi_+(x+\epsilon) - \phi_+(x)]} e^{-i\pi \cdot \text{sgn}(\epsilon)/2} \end{aligned}$$

逐阶展开，直到 ϵ 一阶项，得到：

$$\begin{aligned} \psi(x') \psi^\dagger(x) &= \frac{1}{2\pi\epsilon} + i\frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial_x\varphi + i\frac{\epsilon}{\sqrt{4\pi}} \partial_x^2\varphi - \epsilon(\partial_x\varphi)^2 \\ \psi^\dagger(x') \psi(x) &= \frac{1}{2\pi\epsilon} - i\frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial_x\varphi - i\frac{\epsilon}{\sqrt{4\pi}} \partial_x^2\varphi - \epsilon(\partial_x\varphi)^2 \end{aligned}$$

最后只留下了：

$$\begin{aligned} \psi_+^\dagger(x) (-i\partial_x) \psi_+(x) &\rightarrow \frac{1}{2} \left[(\partial_x\phi_+)^2 + \text{常数} \right] \\ \psi_-^\dagger(x) (i\partial_x) \psi_-(x) &\rightarrow \frac{1}{2} \left[(\partial_x\phi_-)^2 + \text{常数} \right] \end{aligned}$$

其中：

$$\phi = \phi_+ + \phi_-, \quad \theta = \phi_- - \phi_+$$

因此得到了：

$$H_F \rightarrow \frac{1}{2} \int \left[(\partial_x\phi)^2 + \Pi^2 \right] dx = H_B$$

为了下面的一系列推导。不加证明的写出下面四个恒等式：

$$\begin{aligned} \bar{\psi}\psi(x) &= -i\psi_+^\dagger(x)\psi_-(x) + \text{h.c.} \\ &= \frac{1}{2\pi\alpha} \left[e^{-i\sqrt{4\pi}\phi_+(x)} e^{-i\sqrt{4\pi}\phi_-(x)} (-i) + \text{h.c.} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi\alpha} \left(e^{-i\sqrt{4\pi}\phi(x)} e^{\frac{1}{2}4\pi(-1)\frac{i}{4}} (-i) + \text{h.c.} \right) \\ &= -\frac{1}{\pi\alpha} \cos \sqrt{4\pi}\phi. \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \bar{\psi}i\gamma^5\psi &= -\left[\psi_+^\dagger(x)\psi_-(x) + \psi_-^\dagger(x)\psi_+(x) \right] \\ &= \frac{1}{\pi\alpha} \sin \sqrt{4\pi}\phi. \end{aligned} \quad (19)$$

$$\left[\frac{-1}{\pi\alpha} \cos \sqrt{4\pi}\phi \right]^2 = -\frac{1}{\pi} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2\pi^2\alpha^2} \cos \sqrt{16\pi}\phi \quad (20)$$

$$\left[\frac{1}{\pi\alpha} \sin \sqrt{4\pi}\phi \right]^2 = -\frac{1}{\pi} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2\pi^2\alpha^2} \cos \sqrt{16\pi}\phi. \quad (21)$$

最后，我们重新得到上面的连续模型 **Luttinger Liquid** 哈密顿量，第一部分无相互作用部分可以用上面得到的自由玻色场表示，对于相互作用部分 $Un_i n_j$ ，其中 n_j ：

$$\begin{aligned} n_j &= [\psi_+^\dagger(x)e^{i\pi/2j} + \psi_-^\dagger(x)e^{-i\pi/2j}][\psi_+(x)e^{-i\pi/2j} + \psi_-(x)e^{i\pi/2j}] \\ &= [\psi_+^\dagger(x)\psi_+(x) + \psi_-^\dagger(x)\psi_-(x)] + [\psi_+^\dagger(x)\psi_-(x) - \psi_+(x)\psi_-^\dagger(x)] \end{aligned}$$

这都可以由上面四个恒等式得到，最后得到：

$$V = U \int dx \frac{2\partial_x \phi^2}{\pi}$$

把自由玻色场加上，得到：

$$H = \int dx \left(\frac{1}{2} \left[\Pi^2 + \left(1 + \frac{4U}{\pi} \right) (\partial_x \phi)^2 \right] \right) \quad (22)$$

这就是之前通过二次量子化得到的玻色化哈密顿量形式。